

Examens Blancs

2^{ème} Bac SM

Prof B.LOUKILIA

Bouazzaloukilia@gmail.com

Nr whatsapp 0674631401

Examen blanc 1**2ème BAC S.M****Durée : 4h****Année scolaire 2019/2020***Préparation pour
le national 2020***EXERCICE 1** : (3.5 points)Soit m un nombre complexe non réel ($m \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$)I- On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z définie par :

$$(E) : z^2 - (1+i)(1+m)z + 2im = 0$$

0.25 1-a) Montrer que le discriminant de l'équation (E) est non nul.0.5 b) Déterminer z_1 et z_2 , les deux solutions de l'équation (E) 2- On suppose dans cette question que $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$ 0.5 a) Déterminer le module et un argument de $z_1 + z_2$ 0.25 b) Montrer que si $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ alors $z_1 + z_2 = 2i$ II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points suivants :

 A le point d'affixe $a = 1 + i$, B le point d'affixe $b = (1+i)m$, C le point d'affixe $c = 1 - i$, D l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et Ω le milieu du segment $[CD]$.0.5 1- a) Montrer que l'affixe du point Ω est $\omega = \frac{(1-i)(1-m)}{2}$ 0.25 b) Calculer $\frac{b-a}{\omega}$ 0.5 c) En déduire que $(O\Omega) \perp (AB)$ et que $AB = 2O\Omega$ 2- La droite $(O\Omega)$ coupe la droite (AB) au point H d'affixe h 0.5 a) Montrer que $\frac{h-a}{b-a}$ est un réel et que $\frac{h}{b-a}$ est un imaginaire pur.0.25 b) En déduire h en fonction de m

EXERCICE 2: (3 points)

On admet que 2969 (l'année amazighe actuelle) est un **nombre premier**.

Soient n et m deux entiers naturels vérifiant : $n^8 + m^8 \equiv 0 \pmod{2969}$

1- On suppose dans cette question que 2969 ne divise pas n

a) En utilisant le théorème de BEZOUT, montrer que : $(\exists u \in \mathbb{Z}) ; u \times n \equiv 1 \pmod{2969}$

b) En déduire que : $(u \times m)^8 \equiv -1 \pmod{2969}$ et que $(u \times m)^{2968} \equiv -1 \pmod{2969}$

(On remarque que : $2968 = 8 \times 371$)

c) Montrer que 2969 ne divise pas $u \times m$

d) En déduire qu'on a aussi $(u \times m)^{2968} \equiv 1 \pmod{2969}$

2-a) En utilisant les résultats précédents, montrer que 2969 divise n

b) Montrer que : $n^8 + m^8 \equiv 0 \pmod{2969} \Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{2969} \text{ et } m \equiv 0 \pmod{2969}$

EXERCICE 3: (10 points)

PARTIE I : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x \left(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1 \right)$

et on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2- a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 4(e^{-x} - 1)(1 - x)$

b) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, puis donner son tableau de variations.

c) Montrer qu'il existe un unique réel α dans l'intervalle $\left] \frac{3}{2}, 2 \right[$ tel que $f(\alpha) = 0$

(On prendra $e^{\frac{3}{2}} = 4,5$)

d) Vérifier que : $e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}$

3-a) En appliquant le théorème de ROLLE à la fonction f' , montrer qu'il existe un réel x_0 de l'intervalle $]0, 1[$ tel que : $f''(x_0) = 0$

b) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f'' , montrer que, pour tout réel x différent de x_0 de l'intervalle $[0, 1]$, on a : $\frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$

- 0.25 c) En déduire que $I(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe (C)
- 0.5 4-a) Etudier les branches infinies de la courbe (C)
- 0.5 b) Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- (On prendra : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm}$, $f(1) = -0.5$ et il n'est pas demandé de représenter le point I)
- 0.25 5-a) Vérifier que : $(\forall x \in]-\infty, \alpha])$; $f(x) \leq 0$
- 0.75 b) Montrer que : $\int_0^\alpha f(x) dx = \frac{2}{3} \alpha (\alpha^2 - 3)$, en déduire que : $\frac{3}{2} < \alpha \leq \sqrt{3}$
- 0.5 c) Calculer en fonction de α , en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $y = 0$, $x = 0$ et $x = \alpha$
- PARTIE II :** On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
- $$u_0 < \alpha \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n) + u_n$$
- 0.5 1-a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n < \alpha$ (utiliser la question 5-a) de la PARTIE I)
- 0.25 b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- 2- On suppose que $0 \leq u_0$ et on pose $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$
- 0.5 a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) > 0$ (On prendra : $\ln 2 = 0.69$)
- 0.5 b) En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n$
- (On remarque que : $f(x) + x = 4xg(x)$)
- 0.25 c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
- 0.5 d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- 3- On suppose que $u_0 < 0$
- 0.5 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n \leq f(u_0)$
- 0.5 b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq u_0 + nf(u_0)$
- 0.25 c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$



EXERCICE 4

Partie (1) Soit $(V_n)_{n>0}$ la suite telle que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad V_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$

1) montrer que $(\forall k \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{1}{k+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

2) en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad V_n \leq 1 + \ln(n)$

Partie (2) On considère la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ définie par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{U_n}$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n > 0$ en déduire la monotonie de $(U_n)_{n \geq 0}$

2) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1}^2 - U_n^2 = 2 + \frac{1}{U_n^2}$

b) en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{U_k^2}$

3) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n^2 \geq 2n + 2$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

4) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n^2 \leq 2n + 1 + \frac{1}{2} V_n$ en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{\sqrt{2n}}$

EXERCICE 5

Soit m un complexe . on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

(E) $Z^2 - (1 - im)Z + 2m^2 - 2im = 0$ on note $Z_1 ; Z_2$ les solutions de (E)

1) Déterminer m pour que $Z_1 \times Z_2 = 1$

2) Déterminer m pour que $Z_1 = 1 + i$ soit solution de (E) puis déterminer la deuxième solution (on donne $8 - 6i = (3 - i)^2$)

3) Vérifier que le discriminant de (E) s'écrit $\Delta = (1 + 3im)^2$

Puis déterminer les solutions Z_1 et Z_2

Exercice01 : (03 points)

Soit a et b deux entiers relatifs sont premiers entre eux on pose : $N = a^4 + b^4$

- 0.5 1- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{Z}) n^4 \equiv 0[16] \text{ ou } n^4 \equiv 1[16]$.
- 0.25 2- En déduire que $N \equiv 1[16] \text{ ou } N \equiv 2[16]$
- 3- Soit p un nombre premier tel que $p \geq 3$ et $p \nmid N$
- 0.25 a- Montrer que $p \nmid a$ et $p \nmid b$
- 0.75 b- Montrer que : $(\exists c \in \mathbb{Z}) ac \equiv -1[p]$, puis en déduire que $(\exists x \in \mathbb{Z}) x^4 \equiv -1[p]$
- c- Soit r le reste de la division euclidienne de p par 8
- 0.75 i- Montrer que : $x^{r-1} \equiv 1[p]$
- 0.5 ii- Montrer que : $r=1$

Exercice02 : (05 points)**Première partie**

Soit m un nombre complexe non nul, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E): m^2 z^2 + m^3 z + 1 - im^2 = 0$$

- 0.25 1- Résoudre l'équation (E) pour que $m = -1$.
- 0.5 2- Déterminer la valeur de m pour lequel $u = 1+i$ soit une solution de (E), puis déterminer l'autre solution de (E) pour chaque cas.
- 0.25 3- a- Montrer que Δ le discriminant de (E) est écrit sous forme $\Delta = m^2(m^2 + 2i)^2$
- 0.25 b- Déterminer Z_1 et Z_2 les deux solutions de (E).

Deuxième partie

- 1- Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

On considère dans (P) les points A, B et M d'affixe respectivement : $a = -m - \frac{i}{m}$;

$$b = \frac{i}{m} \text{ et } m, \text{ on pose } z = \frac{m-a}{m-b}$$

- 0.75 a- Montrer que : $(\bar{z} = z) \Leftrightarrow \left(\arg(m) \equiv \frac{\pi}{4}[\pi] \text{ ou } \arg(m) \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi] \right)$
- 0.75 b- En déduire l'ensemble des points $M(m)$ pour lequel les points A, B et M sont alignées.

**Troisième partie**

On considère la suite numérique $(U_n)_n$ définie par $(\forall n \in \mathbb{N}^*) U_n = \int_0^1 f_n(x) dx$

- 0.5 1- a- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) U_n > 0$
- 0.25 b- Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur l'intervalle $[0,1]$
- 0.25 c- En déduire que la suite $(U_n)_n$ est décroissante
- 0.5 2- a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) U_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} U_n$
- 0.75 b- En déduire la surface du domaine limité par : (C_{f_1}) et (C_{f_2}) et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$
- 0.75 3- Montrer que $(\forall n \geq 2) \frac{1}{n+1} \leq U_n \leq \frac{1}{n-1}$, puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} nU_n$
- 4- Soit a un réel positive tel que $a \neq U_1$ on considère les suites $(V_n)_n$ et $(d_n)_n$ définies par :
- $$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \begin{cases} V_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} V_n \\ V_1 = a \end{cases} \text{ et } d_n = |V_n - U_n|$$
- 0.75 a- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1$, puis démontrer que $\lim d_n = +\infty$
- 0.5 b- Montrer que la suite $(V_n)_n$ est divergente.

Quatrième partie

On pose $(\forall n \in \mathbb{N}^*) W_n = \frac{2^n}{n!} U_n$

- 0.25 1- a- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$
- 0.25 b- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) W_n \leq \frac{2e^2}{n+1}$, puis en déduire que $\lim W_n = 0$
- 0.5 2- a- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) W_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + W_n$
- 0.25 b- Calculer la dérivée de la fonction $x \rightarrow \left(\frac{3}{2} - x\right)e^{2x}$, puis montrer que $W_1 = \frac{1}{2}(e^2 - 3)$
- 0.5 c- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) W_n = \frac{1}{2} \left(e^2 - \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} \right)$
- 0.25 d- En déduire la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!}$



2- On considère R la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$, on pose $A' = R(A)$; $M' = R(M)$
et $B' = R^{-1}(M)$

0.75 a- Déterminer a' l'affixe du point A' et montrer que l'affixe du point B' est
 $b' = -im + \frac{i-1}{m}$

0.75 b- Déterminer m' l'affixe du point M' , puis montrer que B est le milieu de segment $[B'M']$

0.75 c- Soit I le milieu de segment $[AM]$, d'une affixe z_I

Calculer $\frac{b'-a'}{b-z_I}$, puis en déduire que $(A'B') \perp (BI)$ et que $A'B' = 2BI$

Problème : (12 points)

Première partie

Soit n un entier naturel non nul, on considère la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $f_n(x) = (1-x)^n e^{2x}$, et (C_{f_n}) sa courbe dans un repère orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et que
 $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$

0.75 1- Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = 0$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

0.5 2- Étudier les branches infinies de la courbe (C_{f_n}) au voisinage de $+\infty$.

0.5 3- Calculer $f'_n(x)$, puis dresser le tableau de variation des fonctions f_1 et f_2 .

0.25 4- a- Étudier la position relative des courbes (C_{f_1}) et (C_{f_2})

1 b- Tracer dans un repère orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes (C_{f_1}) et (C_{f_2})

Deuxième partie

On considère la fonction F définie sur $]-\infty, 0]$ par : $F(x) = \int_x^0 \frac{f_1(t)}{1+e^{2t}} dt$

0.5 1- a- Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ et que

$$F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

0.25 b- Étudier les variations de F

0.75 2- a- Montrer que $(\forall x < 0) \frac{1}{2} \int_x^0 f_1(t) dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}} \int_x^0 f_1(t) dt$

0.75 b- En utilisant une intégrale par parties montrer que : $\int_x^0 f_1(t) dt = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{3}{4} e^{2x}$

0.75 c- On admet que $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = l$, montrer que $\frac{3}{8} \leq l \leq \frac{3}{4}$

**EXERCICE 1 : (3.5 points) les parties I et II sont indépendantes**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

I- On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : iz^2 + (2-i)az - (1+i)a^2 = 0$ où a est un nombre complexe non nul.

0.75 1) Déterminer z_1 et z_2 , les deux racines de l'équation (E)

0.25 2) a- Vérifier que : $z_1 z_2 = a^2(i-1)$.

0.5 b- Montrer que : $z_1 z_2$ est un nombre réel $\Leftrightarrow \arg a \equiv \frac{-3\pi}{8} \left[\frac{\pi}{2} \right]$

II- Soient c un nombre réel non nul et z un nombre complexe non nul.

On considère les points A, B, C, D et M d'affixes respectifs $1, 1+i, c, ic$ et z

0.5 1)a- Montrer que : A, D et M sont alignés $\Leftrightarrow (ic+1)z + (ic-1)\bar{z} = 2ic$ (remarquer que $c = \bar{c}$)

0.5 b- Montrer que : $(AD) \perp (OM) \Leftrightarrow (ic+1)z - (ic-1)\bar{z} = 0$

2) Soit h l'affixe du point H , la projection orthogonale du point O sur (AD)

0.75 a - Montrer que : $h - (1+i) = \frac{i}{c}(h-c)$.

0.25 b - En déduire que $(CH) \perp (BH)$

EXERCICE 2 : (3 points)

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 143x - 195y = 52$

0.5 a - Déterminer le plus grand commun diviseur de 143 et 195, puis en déduire que l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$

0.75 b - Sachant que $(-1, -1)$ est une solution particulière de l'équation (E) , résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) en précisant les étapes de la résolution.

2) Soit n un entier naturel non nul premier avec 5

0.5 Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$ on a : $n^{4k} \equiv 1 \pmod{5}$

3) Soient x et y deux entiers naturels non nuls tel que $x \equiv y \pmod{4}$

0.5 a- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $n^x \equiv n^y \pmod{5}$

0.5 b- En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $n^x \equiv n^y \pmod{10}$

0.25 4) Soient x et y deux entiers naturels tel que (x, y) est solution de l'équation (E)

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les deux nombres n^x et n^y ont le même chiffre des unités dans l'écriture dans le système décimal.

**EXERCICE 3 : (5.5 points)**

n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$

Soit (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- 0,5 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$
- 0,5 2) a - Etudier la branche infinie de (C_n) au voisinage de $-\infty$.
- 0,5 b - Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe (C_n) au voisinage de $+\infty$, puis déterminer la position relative de (C_n) et (D)
- 0,75 3) Etudier les variations de f_n et dresser son tableau de variations.
- 0,75 4) Construire la courbe (C_3) . (On prend $f_3(-0,6) \approx 0$ et $f_3(-1,5) \approx 0$ et $\ln 3 \approx 1,1$)
- 0,25 5) a- Montrer que pour $n \geq 3$ on a : $\frac{e}{n} < \ln n$
- 1 b- Montrer que pour $n \geq 3$ l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions x_n et y_n telles que : $x_n \leq -\ln n$ et $-\frac{e}{n} \leq y_n \leq 0$
- 0,5 c- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$
- 0,25 6) On considère la fonction numérique g définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = -1 - x \ln x & ; x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$
- 0,25 a- Montrer que la fonction g est continue à droite au point 0
- 0,25 b- Vérifier que pour $n \geq 3$ on a : $g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$
- 0,25 c- En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{x_n}$

EXERCICE 4 : (4.5 points)

On considère la fonction numérique F définie sur $[0, 1]$ par :

$$F(0) = 1 \quad \text{et} \quad F(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2} \quad \text{si } x > 0$$

- 0,25 1) Soit x un élément de $[0, 1]$; Montrer que pour tout t de $[0, x]$ on a : $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$
- 2) Soit x un élément de $]0, 1]$
- 0,5 a- Montrer que $F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{1+2t} dt$
- 0,75 b - Montrer que : $\frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$ En déduire que la fonction F est continue à droite au point 0

- 0.75 3) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout x de $[0,1]$ on a :

$$\int_0^x \frac{2t}{1+2t} dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2 \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt$$

- 4) Soit x un élément de $]0,1]$

0.5 a- Montrer que $F'(x) = -\frac{4}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt$

0.75 b-Montrer que : $-\frac{4}{3} \leq F'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$ (on pourra utiliser le résultat de la question 1))

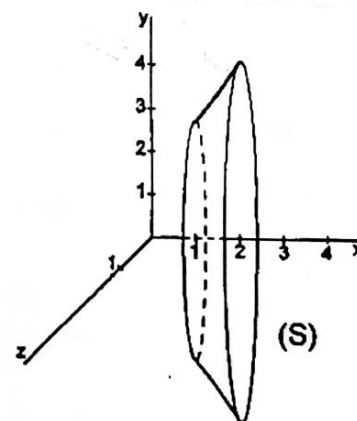
0.75 c- En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction F sur $[0,x]$ montrer que $-\frac{4}{3} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$

- 0.25 d- Dédurre que la fonction F est dérivable à droite en 0 en précisant son nombre dérivé à droite au point 0.

Exercice 5 (4 points)

Dans la figure ci-contre, le solide de révolution (S) est obtenu en faisant tourner la portion de la courbe d'équation $y = e^{\sqrt{x}}$, $x \in [1, 2]$ autour de l'axe (Ox).

Le but de cet exercice est de calculer le volume $\mathcal{V}$ de ce solide.



- 1) Soit F la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x e^{\sqrt{4t}} dt$.

Vérifier que $\mathcal{V} = \pi F(2)$.

- 2) Soit G la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $G(x) = \int_1^{\sqrt{4x}} te^t dt$.

a) Montrer que G est dérivable sur $[1, +\infty[$ et que $G'(x) = 2 F'(x)$.

b) En déduire que pour tout réel x de $[1, +\infty[$, $2 F(x) = G(x) - G(1)$.

- 3) a) Montrer que pour tout réel x de $[1, +\infty[$, $G(x) = (\sqrt{4x} - 1)e^{\sqrt{4x}}$.

b) Calculer alors $\mathcal{V}$.

L'épreuve comporte trois exercices et un problème tous indépendants deux à deux.

Exercice 1

1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y'' - 6y' + 8y = 0 .$$

2-a- Donner f la solution particulière de (E) qui vérifie les conditions suivantes : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$.

b- Déduire une primitive de f .

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

On note le point A d'affixe -2 .

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $3z^3 - 2z^2 + 4z + 16 = 0$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et M, N et P les points d'affixes respectives α , $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

1-Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ alors les points M, N et P sont alignés.

Dans la suite de l'exercice on suppose que α n'appartient pas à $\mathbb{R}$.

2-Montrer que si MNAP est un parallélogramme alors α est solution de l'équation (E).

3-Dans cette question on prend $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$.

a-Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes α ,

$$\frac{3}{2}\alpha^2 \text{ et } \frac{8}{\alpha} .$$

b-placer dans le repère $(o, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, M, N et P.

c- Donner l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

d-Montrer que le quadrilatère MNAP est un parallélogramme .

4-a-Montrer que si α est solution de l'équation (E) alors $\bar{\alpha}$ est solution de l'équation (E).

b-En déduire les affixes des points M pour lesquels MNAP est un parallélogramme.

Exercice 3

1-Soit x un entier non nul premier avec 53.

a-S'assurer que $x^{52} \equiv 1 [53]$.

b-En déduire que pour tout entier naturel k , $x^{52k+1} \equiv x [53]$.

2-Soit l'équation $(E_1) : x^{29} \equiv 2 [53]$ ou $x \in \mathbb{Z}$.

Montrer que 2^9 est une solution de (E_1) .

3-Soit x est une solution de (E_1) .

a-Montrer que x est premier avec 53.

b-Montrer que $x^{261} \equiv x [53]$.

c-En déduire que $x \equiv 2^9 [53]$.

4-a-Montrer que $2^9 \equiv 35 [53]$.

b-Donner alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E_1) .

5-On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E_2) : 71\alpha - 53\beta = 1$.

a-Vérifier que $(3,4)$ est une solution l'équation (E_2) .

b-Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E_2) .

6- Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} x \equiv 34 [71] \\ x^{29} \equiv 2 [53] \end{cases}$

Problème

Partie (1)

1-Montrer que $\forall x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[; \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{t+1} dt = \frac{\ln(x+1)-x}{x^2} + \frac{1}{2}$.

2-Montrer que $\forall x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[; \frac{x}{3(x+1)} \leq \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{t+1} dt \leq \frac{x}{3}$.

3-En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)-x}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

Partie (2)

On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x)}{x-1} & ; x \in]0, +\infty[- \{1\} \\ f(1) = 1 \end{cases}.$$

1-Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis donner leurs interprétations géométriques.

2-a- Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.

b- Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$ puis interpréter géométriquement le résultat.

3-a- Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1, +\infty[$ et que pour tout réel strictement positif différent de 1 on a :

$$f'(x) = \frac{(x-1)-x\ln(x)}{x(x-1)^2}.$$

b- Montrer que pour tout réel strictement positif différent de 1 on a :

$$(x-1) - x\ln(x) < 0$$

puis dresser le tableau de variations de f .

4- Tracer la courbe (C_f) dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ en précisant la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.

5- Montrer que pour tout entier naturel non nul n , il existe un unique

$$\alpha_n > 0 \text{ tel que } f(\alpha_n) = 1 + \frac{1}{n}.$$

6-a- Vérifier que pour tout entier naturel non nul n , $0 < \alpha_n < 1$.

b- Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n>0}$ est strictement croissante puis déduire qu'elle converge.

c- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n) = 1$.

d- Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - \alpha_n) = 2 \text{ puis déduire que } \lim_{n \rightarrow +\infty} ((\alpha_n)^n) = \frac{1}{e^2}.$$

Partie ③

Soit F la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{x^2} f(t) dt & ; x > 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}.$$

1-a- b- Montrer que pour tout réel strictement positif différent de 1 on a :

$$\frac{2x \ln x}{x+1} \leq F(x) \leq x \ln x.$$

b- Montrer que F est continue à droite au point zéro.

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat.

2-a- Montrer que pour tout $x > 1$ on a :

$$\ln(x) \ln(x+1) \leq F(x) \leq 2 \ln(x) \ln(x+1).$$

b- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$ puis donner leurs interprétations géométriques.

3-a- Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $F'(1) = 1$ et que pour tout

$$x > 0, \text{ on a } F'(x) = \frac{(3x-1) \ln x}{x^2 - 1}.$$

b- Dresser le tableau de variations de F sur $]0, +\infty[$.

Fin.

Exercice 1 : 7,5 pt

Soit F la fonction définie par :

$$\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \cup]1; +\infty[: \quad F(x) = \int_{\ln x}^{\ln 2x} \left(\frac{e^t}{t} \right) dt ; \text{ si } x \neq 0 ; \quad F(0) = 0$$

0,5pt

1) a- Montrer que F est dérivable sur chacun des intervalles : $\left]0; \frac{1}{2}\right[$; $]1; +\infty[$

0,5pt

b-Vérifier que : $\forall x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[\cup]1; +\infty[: F'(x) = \frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{(\ln x)(\ln 2x)}$

0,5pt

2) a- Montrer que : $\forall x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[\cup]1; +\infty[: F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} dt$

0,5pt

b- En déduire : $\forall x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[\cup]1; +\infty[: \frac{x}{\ln(2x)} \leq F(x) \leq \frac{x}{\ln x}$

0,5pt

3) a- Montrer que F est continue à droite en 0

0,5pt

b- Etudier la dérivabilité de F à droite en 0

1pt

c- Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$ et interpréter géométriquement les résultats .

0,75pt

4) Soit u la fonction définie par : $\forall t \in]0; 1[: u(t) = 2 - 2t + \ln t$

a- Montrer que : $\exists ! \alpha \in \left]0; \frac{1}{2}\right[: u(\alpha) = 0$, et en déduire le signe de u sur $[\alpha; 1[$

0,5pt

b- En déduire que : $\forall x \in \left[\alpha; \frac{1}{2}\right[: F(x) \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{2t-2}$

0,5pt

c- Calculer $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} F(x)$

0,5pt

5) Montrer que : $\forall t > 0 : \ln t \leq t - 1$, puis calculer : $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$

0,5pt

6) a- Dresser le tableau de variation de F

0,75pt

b- Construire la courbe de la fonction F dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(on prend $F(2) \approx 1,9$)

<u>Exercice 2 : 2,5 pts</u>	
1pt	1) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x) - \arctan(x)$ Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère l'équation $(E_n) : f(x) = n\pi$ Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution x_n dans $]0, +\infty[$.
0,5pt	2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n > e^{n\pi}$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$
0,5pt	3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : \ln\left(\frac{x_n}{e^{n\pi}}\right) = \arctan(x_n)$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{e^{n\pi}}$.
0,5pt	4) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = \arctan(x_n) - \arctan(x_{n+1}) - \pi$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} \right)$
<u>Exercice3 : 3,75 pts</u>	
on considère l'ensemble : $E = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} c & a & b \\ 0 & c & a \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} / (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ et On pose : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$	
0,5pt	1) a- Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.
0,5pt	b- Montrer que (I, J, K) est une base de E .
0,25pt	2) a- Calculer K^2
0,5pt	b- Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}); \times)$.
1pt	3) Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire non intègre.
	4) Pour tout a de $\mathbb{R}$, on pose $M_a = M(a, \frac{1}{2}a^2, 1)$ et $G = \{M_a / a \in \mathbb{R}\}$ On considère l'application : $f : \mathbb{R} \rightarrow G$ telle que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = M_x$
0,5pt	a- Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(G, \times)$.
0,25pt	b- En déduire que la structure de $(G, \times)$.
0,25pt	c- Déterminer M_a^{-1} , la matrice inverse de la matrice M_a .

Exercice 4 : 3,25 pts (les parties A et B sont indépendantes)

Le plan complexe étant rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Partie A :

1) On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation : (E) : $z^2 - 4z \cos\left(\frac{3\theta}{4}\right) e^{i\frac{\theta}{4}} + 4e^{i\frac{\theta}{2}} = 0$ où $\theta \in]0; 2\pi]$

0,25pt a- Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = \left(4ie^{i\frac{\theta}{4}} \sin\left(\frac{3\theta}{4}\right)\right)^2$.

b- Soient z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E).

0,5pt Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

0,5pt c- Montrer que : $(OM_1) \perp (OM_2) \Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{3} \left[\frac{2\pi}{3} \right]$ avec M_1 et M_2 les points d'affixes z_1 et z_2 respectivement.

Partie B :

Soient M et A les points d'affixes respectives : z et $\bar{z}$.

B(b) est l'image du point A par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

M'(z') est l'image du point B(b) par la translation T de vecteur $\vec{u} - \vec{v}$

0,5pt 1) Déterminer b en fonction de z et vérifier que $z' = i\bar{z} + 1 - i$

2) On considère la transformation f qui transforme un point M(z) en M'(z') tel que : $z' = i\bar{z} + 1 - i$

0,5pt a- Montrer que l'ensemble des points invariants par f est la droite (D) de vecteur directeur $\vec{w}(1,1)$.

0,5pt b- Calculer $\frac{z' - z}{1 + i}$, puis déduire que $\overrightarrow{MM'} \perp \vec{w}$.

0,25pt c- Montrer que le milieu du segment [MM'] appartient à la droite (D).

0,25pt d- En déduire la nature de la transformation f

Exercice 5 : 3 pts

Partie A :

0,25pt 1) Montrer que si k est un nombre premier positif tel que $5^k - 2^k \equiv 0 [k]$, alors $k = 3$.

0,25pt 2) En déduire que si k est un nombre premier supérieur strictement que 3, alors les nombres k et $5^k - 2^k$ sont premiers entre eux.

Partie B :

Soient p et q deux nombres premiers positifs tels que :

$$3 \leq p < q \quad \text{et} \quad (5^p - 2^p)(5^q - 2^q) \equiv 0 [pq]$$

1) On suppose dans cette question que $p = 3$.

0,25

a-Montrer que : $39(5^q - 2^q) \equiv 0 [q]$

0,25pt

b- En déduire que $q = 13$ (on pourra utiliser la question 2 de la partie A)

2) On suppose dans cette question que $p > 3$.

0,75pt

a-vérifier que $p > 5$, puis montrer que : $5^q - 2^q \equiv 0 [p]$ et que :

$$5^{p-1} - 2^{p-1} \equiv 0 [p]$$

b- Soit d le plus petit entier naturel non nul tel que : $5^d - 2^d \equiv 0 [p]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $5^n - 2^n \equiv 0 [p]$, et r le reste de la division euclidienne de n par d .

0,25pt

Montrer que : $5^r - 2^r \equiv 0 [p]$

0,25pt

c-Montrer que d est un diviseur commun de q et $p-1$.

0,25pt

d- En déduire que $d = 1$.

3) Déduire de ce qui précède les nombres premiers positifs p et q tels que :

0,5pt

$$3 \leq p < q \quad \text{et} \quad (5^p - 2^p)(5^q - 2^q) \equiv 0 [pq]$$

L'épreuve comporte trois exercices et un problème tous indépendants deux à deux.

Exercice 1

1- Résoudre l'équation différentielle suivante (E) : $y'' + y = 0$.

2- Soit E l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ ou f' désigne la fonction dérivée de f .

a- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos x$.

Vérifier que g est un élément de E .

b- Soit f un élément de E . Vérifier que, pour tout réel x , $f''(x) = f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

c- En déduire que si f un élément de E alors f est solution de l'équation différentielle (E) : $y'' + y = 0$.

d- Déterminer alors l'ensemble E .

Exercice 2

On considère dans l'espace vectoriel réel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ l'ensemble

$$E = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a + 2b \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \text{ on pose } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1- a- Montrer que $(E, +)$ est un groupe commutatif.

b- Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel

et donner sa dimension

2- Calculer J^2 en fonction de I et J et en déduire le produit

$$M(a, b) \times M(c, d)$$

3- On considère l'application f définie par $f : E \rightarrow \mathbb{C}$

$$M(a, b) \mapsto z = (a + b) + ib$$

a- Montrer que f est un isomorphisme de $(E, \times)$ vers $(\mathbb{C}, \times)$.

c-En déduire la structure de $(E, +, \times)$.

d-Determiner dans E l'ensemble des solutions de l'equation $M^3 - I + J = \theta$ avec θ est la matrice nulle dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - (1 + 2i)mz - (1 - i)m^2 = 0$.
ou m est un nombre complexe non nul d'argument $\theta \in]0, \pi[$.

1-a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

On note z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) .

b-Montrer que $(z_1 \cdot z_2 \text{ est strictement positif })$ si et seulement si $(\theta = \frac{5\pi}{8})$.

Dans la suite de l'exercice on prend $\theta = \frac{5\pi}{8}$.

2-Verifier que $z_1 \cdot z_2 = |m|^2 \sqrt{2}$.

3- Le plan complexe est rapporté á un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$,

Soit t un réel strictement positif tel que $2 < t < 3$ et $m = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt[4]{2}} e^{i\frac{5\pi}{8}}$.

On se propose de construire les points M_1 et M_2 images des solutions z_1 et z_2 de l'équation (E) , Correspondant au nombre complexe m .

B et C sont les d'affixes respectives $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et t .

E est le point d'intersection du demi-cercle (C) de diamètre $[BC]$ avec l'axe $(o, \vec{v})$.

a-Construire un schéma convenable .

b-Montrer que $OE^2 = OB \cdot OC$.

c-En déduire que $|m| = OE$.

4-a-Construire le point A d'affixe m .

b-On déduire une construction points M_1 et M_2 images des solutions z_1 et z_2 de l'équation (E) . (on convient que $|z_1| < |z_2|$).

Problème

On considère la fonction numérique f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = (x + 1)e^{-x}$$

Partie ①

1-a- Montrer que pour tout nombre réel positif x , il existe un réel $c_x \in]x, 2x[$ tel que $f(2x) - f(x) = -xc_x e^{-c_x}$

b-En déduire que pour tout $x > 0$, $f(2x) - f(x) < 0$

2- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(2x) - f(x) = 0$

Partie ②

Soit F la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{1 + te^{-t}} dt, x > 0 \text{ et } F(0) = 0$$

1-a-Verifier que pour tout $x \in [0,1]$, $1 - x \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 - \frac{x}{2}$

b- En déduire que pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$1 - te^{-t} \leq \frac{1}{1+te^{-t}} \leq 1 - \frac{te^{-t}}{2}$$

c- Montrer que pour tout nombre réel positif x ,

$$x + f(2x) - f(x) \leq F(x) \leq x + \frac{1}{2}(f(2x) - f(x))$$

d- En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$, puis que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe (C_F)

e-Etudier la position relative de (D) et (C_F) .

2- Montrer que F est dérivable à droite au point zéro puis déterminer $F'_d(0)$.

3-a- Montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que pour tout $x \in]0, +\infty[$

$$F'(x) = \frac{e^{2x} + 2x(e^x - 1)}{(e^{2x} + 2xe^x)(1 + xe^{-x})}$$

b-Dresser le tableau de variations de F .

c-Soit S l'aire du domaine situé entre la courbe C_F et la droite (D) et les deux droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Montrer que $0 \leq S \leq \frac{1}{4}$

Partie ③

Soit n un entier naturel non nul.

1-a- Montrer qu'il existe $\alpha_n \in [0, +\infty[$ tel que $\int_{\alpha_n}^{2\alpha_n} \frac{1}{1+te^{-t}} dt = e^{-n}$

*b- Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n>0}$ est décroissante
puis déduire qu'elle converge.*

c- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$.

2-Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ la suite numérique définie par :

$$U_n = \int_0^{\alpha_n} F(t) dt \quad \text{pour tout entier naturel non nul } n.$$

a- Montrer qu'il existe $\beta_n \in [0, \alpha_n[$ tel que $U_n = \alpha_n F(\beta_n)$.

*b- Montrer que la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ est décroissante
puis déduire qu'elle converge en déterminant sa limite.*

3-On considère la suite numérique $(V_n)_{n \geq 1}$ définie pour tout $n \geq 1$ par

$$V_n = n \left(F \left(u_n + \frac{2}{n} \right) - F \left(u_n + \frac{1}{n} \right) \right)$$

a-En utilisant le théorème des accroissements finis, Montrer qu'il existe

$$\gamma_n \in \left] u_n + \frac{1}{n}, u_n + \frac{2}{n} \right[, \quad V_n = \frac{e^{2\gamma_n} + 2\gamma_n(e^{\gamma_n}-1)}{(e^{2\gamma_n} + 2\gamma_n)(1 + \gamma_n e^{-\gamma_n})}$$

*b- En déduire que la suite numérique $(V_n)_{n \geq 1}$ est convergente puis
déterminer sa limite.*

L'épreuve comporte quatres exercices et un problème tous indépendants deux à deux .

Exercice 1

Pour tout entier naturel non nul n , on considère la fonction numérique f_n définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = e^{-x} - x^{2n+1}$.

1-Etudier les variations de f_n .

2-Montrer que pour tout entier naturel non nul n , l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n et que $u_n \in]0,1[$.

On définit ainsi sur $\mathbb{N}^$, une suite (u_n) .*

3-a-Soit n un entier naturel non nul et x un réel de l'intervalle $]0,1[$.

Comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$.

b- Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $f_n(u_{n+1}) < 0$.

c- Montrer que la suite (u_n) est croissante puis déduire qu'elle converge .

4-a- Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\ln(u_n) = -\frac{u_n}{2n+1}$.

b-Calculer la limite de suite (u_n) .

Exercice 2

Soit m un nombre complexe non nul avec $m \neq \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - (1 + m(2 + i))z + 2m(1 + im) = 0$.

1-a-Vérifier que le discriminant de (E) s'écrit $\Delta = (1 + m(-2 + i))^2$

b- Résoudre l'équation (E) .

2-On suppose que $m \neq i$ et on pose $u = \frac{2m}{1+im}$

a-Montrer que $u \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |m|^2 = \operatorname{Im}(m)$.

b-En déduire l'ensemble des points $M(m)$ pour que $u \in \mathbb{R}$.

3- Le plan complexe est rapporté á un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

Soient M, A et B les points d'affixes respectives $m, -i$ et u .

a-Montrer que les points A, M et O sont alignés $\Leftrightarrow m \in i\mathbb{R}$

b-Montrer que $\frac{u+i}{u} = \frac{1}{2} \frac{m+i}{m}$.

c-En déduire que si $m \notin i\mathbb{R}$ alors les points A, M, O et B sont cocycliques.

Exercice 3

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $2013x - 1962y = 54$

1-a-Déterminer le pgcd de 2013 et 1962 et en déduire que l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

b-Sachant que le couple $(78, 80)$ est une solution particulière de (E) résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) en précisant les étapes de la résolution.

2-Montrer que si le couple (x, y) est une solution de (E) alors $x \equiv 0 [6]$.

3-On pose $d = x \wedge y$ avec le couple (x, y) est une solution de (E).

Déterminer les valeurs possibles du nombre d .

4-Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système
$$\begin{cases} 671a - 654b = 18 \\ a \wedge b = 18 \end{cases}$$

Exercice 4

Partie (1)

Pour tout x et $y \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$, on pose $x * y = x + y - 2xy$

1 - Montrer que l'on définit ainsi une loi de composition interne dans $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

2 - Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.

3-Montrer que $(\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}, *)$ est un groupe commutatif.

4- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}, \forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$

$$x * x * x * \dots * x = \frac{1}{2} [1 - (1 - 2x)^n] \text{ avec } n \text{ fois } x$$

Partie (2)

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$, on considère l'ensemble $E = \left\{ A(x) / x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \right\}$ avec

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}$$

1-Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.

2- On considère l'application f définie par $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \rightarrow E$

$$x \mapsto A(x)$$

a- Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}, *)$ vers $(E, \times)$.

b- En déduire la structure de $(E, \times)$

c- Soit n un entier naturel non nul et $B = A\left(-\frac{1}{2}\right)$

Montrer que $B^n = A\left(\frac{1-2^n}{2}\right)$ et $[B^n]^{-1} = A\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

avec $[B^n]^{-1}$ est la matrice inverse B^n .

Problème

Partie (1)

On considère la fonction numérique f par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

On appelle (C_f) la courbe représentative de la fonction numérique f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1-Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$ et en déduire que $D_f = \mathbb{R}$.

2-a-Montrer que f est impaire puis déduire que $D_E = [0, +\infty[$.

b-Etudier la branche infinie de (C_f) en $+\infty$.

3-a-Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b-En déduire que f est strictement croissante sur D_E .

4-Donner l'équation de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.

5-Tracer la courbe (C_f) .

Partie (2)

c-Soit n un entier naturel non nul

On pose $V_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+k}$ et $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{1}{n+k}\right)$

1-Calculer $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$ puis déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \ln 2$.

2-a- Montrer que $\forall h \geq 0 \quad 1 - h \leq \frac{1}{1+h}$ et $\sqrt{1+h} \leq 1 + \frac{h}{2}$.

b-En déduire $\forall t \geq 0 \quad 1 - \frac{t^2}{2} \leq f'(t) \leq 1$.

3-a- Montrer que $\forall x \geq 0 \quad x - \frac{x^3}{6} \leq f(x) \leq x$.

b-En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^ \quad V_n \left(1 - \frac{1}{6n^2}\right) \leq U_n \leq V_n$ puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$*

Partie (3)

Soit F la fonction numérique définie par :
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^* , F(x) = \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t^2} dt \\ F(0) = \ln 2 \end{cases}$$

1-Montrer que F est paire.

2-a-Prouver que $\forall x > 0 \quad -\frac{x^2}{4} + \ln 2 \leq F(x) \leq \ln 2$.

b-Etudier la continuité et la dérivabilité de F à droite de 0 .

3-a- Prouver que $\forall x > 0 \quad \frac{f(x)}{2x} \leq F(x) \leq \frac{f(2x)}{2x}$

b-Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$.

4-a- Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x \in]0, +\infty[$

$$F'(x) = \frac{f(2x) - 2f(x)}{2x^2}.$$

b-Montrer que f' est décroissante sur $]0, +\infty[$

puis déduire que $\forall x > 0 \quad f(2x) < 2f(x)$.

c- Dresser le tableau de variations de F sur $[0, +\infty[$.

Recommandations Générales

- ❖ L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.
- ❖ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve dans l'ordre qui lui convient.
- ❖ Eviter l'utilisation du stylo rouge.
- ❖ Traiter d'abord les questions qui vous paraissent faciles.
- ❖ Respecter la numérotation des exercices et des questions.
- ❖ Si une question vous paraît difficile admettez son résultat et utiliser ce résultat pour répondre aux questions qui suivent.
- ❖ Il sera tenu compte de la rédaction des réponses lors de la correction.

L'épreuve se compose de 5 exercices indépendants répartis comme suit :

Exercice 1	Equations différentielles	1 pts
Exercice 2	Nombres complexes	4 pts
Exercice 3	Fonction définie par intégrale	3 pts
Exercice 4	Etude de fonction et suites	8 pts
Exercice 5	Arithmétique	4 pts

Bonne courage

0.25 0.25 0.5	<u>Exercice 1 : (1 points)</u> 1- Résoudre l'équation différentielle suivante : $(E) : y'' - 4y' + 13y = 0$ 2- a- Déterminer la solution particulière f de (E) vérifiant les conditions suivantes : $f(0)=1$ et $f'(0)=2$. b- Dédurre la valeur numérique exacte de l'intégral : $I = \int_0^{\pi} e^{2x} \cos(3x) dx$.
0,25 0,75 1 0,5 0,25 0,5 0.75	<u>Exercice 2 : (4 points)</u> <i>Les trois parties (I), (II) sont indépendantes.</i> partie (I) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{1-i\}$. On considère l'équation $(E): z^2 - (2 + \alpha(-1+i))z - i\alpha(\alpha-2) = 0$. 1- a- Montrer que le discriminant de (E) est : $\Delta = (-2 + (1+i)\alpha)^2$. b- En déduire que l'équation (E) admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ en précisant leurs valeurs. 2- On considère les points Ω, A, B et C d'affixes respectives $\omega = 1+i$, $a = i\alpha$, $b = -\alpha + 2$ et $c = (1-i)(1-\alpha)$. Déterminer l'ensemble des points A pour que les points O, A et B soient alignés. 3- a- Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$. b- Vérifier que $r(A) = B$. 4- Quelle est la nature du quadrilatère ΩACB ? justifier votre réponse. Partie (II) 5- a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(F): z^3 = 1$ b- Déterminer la nature du triangle ABC tel que les points A, B et C sont les images des solutions de l'équation (F).
0.5 0.5 0.5	<u>Exercice 3 : (3 points)</u> On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases} f(x) = \int_x^{2x} \ln(e^t - 1) dt & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^* \\ f(0) = 0 \end{cases}$ 1- a- Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$. b- Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}_*^+$. 2- On considère la fonction numérique g définie par : $g(x) = \ln(e^x - 1) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_*^+.$ a- Etudier la monotonie de la fonction numérique g.

0.5	b- Déduire que $\forall x > 0 : x.g(x) \leq f(x) \leq x.g(2x)$.
0.25	c- Montrer que f est continue à droite au point zéro.
0.25	d- Etudier la dérivabilité de f à droite au point zéro .
0.5	e- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
<u>Exercice 4</u> (8 points) Partie ��1�� On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right)$. On appelle (C_f) la courbe représentative de la fonction numérique f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. 1- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. 2- Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de f . 3- Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) puis préciser la position relative de (D) et (C_f) . 4 -a- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera. b- Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$. 5 - Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$. 6- Construire dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite (D) et les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ en précisant la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisses 0. $(C_{f^{-1}})$ est la courbe représentative de f^{-1}). Partie ��2�� Soit $(u_n)_n$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ 1- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n > 0$. 2-a- Montrer que : $\forall x > 0 ; f'(x) \leq \frac{1}{2}$. b- En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} ; \left u_{n+1} - \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \right \leq \frac{1}{2} \left u_n - \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \right$. c- Montrer que $(u_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite .	

	Partie ③
0,75	1- Montrer que : $\forall t > 0 ; t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$.
0,75	2- En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R} ; e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} \leq f(x) \leq e^{-x}$.
0,5	3- Soit A l'aire du domaine plan limité par (C_f) , l'axe des abscisses , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=1$.
0,5	Montrer que $\frac{1}{4e^2}[(3e-1)(e-1)] \leq A \leq \left(\frac{e-1}{e}\right)$.
	<u>Exercice 5 : (4 points)</u> <i>Les trois parties (I) , (II) et (III) sont indépendantes.</i>
0,25	I. 1- Montrer que le nombre 673 est premier.
0,5	2- Montrer que : $2^{672} \equiv 1 [2019]$ (remarquer que : $2019 = 673 \times 3$).
0,25	3- Quelle est le reste de la division euclidienne de 2^{2018} par 2019.
0,5	4- En déduire que les nombres 2019 et $2^{2018} - 2019^{2019}$ sont premiers entre eux.
	II. Dans $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$, on considère l'équation : $(E): x^2 + y = xy$.
	Soit $(x,y) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$; soit d le plus grand diviseur commun de x et y .
	Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ tel que : $x = ad$ et $y = bd$.
0,5	1- Montrer que si (x,y) est une solution de (E) , alors a divise b .
0,5	2- En déduire que la seule solution de l'équation (E) dans $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ est $(2,4)$.
	III. Soit b un entier naturel .
0,5	1- Déterminer les restes possibles dans la division euclidienne de b^4 par 10 .
0,5	2- En déduire que $b^4 \equiv 1 [10]$ si et seulement si b est premier avec 10 .
0,5	3- Déterminer les deux derniers chiffres de 67^{42} .
	<i>Fin du sujet.</i>

Partie correction

2^{ème} Bac SM

Prof B.LOUKILIA

Bouazzaloukilia@gmail.com

Nr whatsapp 0674631401

Exercice 01 (Arithmétique)

① Soit $n \in \mathbb{Z}$, si n est pair donc $\exists k \in \mathbb{Z} : n = 2k$.

$$\Rightarrow n^4 = (2k)^4 = 16k^4 \Rightarrow n^4 \equiv 0 \pmod{16}$$

si n est impair donc $\exists k \in \mathbb{Z} : n = 2k+1$

$$\Rightarrow n^4 = (2k+1)^4 = 16k^4 + 4(2k)^3 + 6(2k)^2 + 4(2k) + 1$$

$$\Rightarrow n^4 = 16k^4 + 32k^3 + 24k^2 + 8k + 1$$

$$\Rightarrow n^4 = 16k^4 + 32k^3 + 16k^2 + 8k^2 + 8k + 1$$

$$\Rightarrow n^4 = 16(k^4 + 2k^3 + k^2) + 8k(k+1) + 1$$

et comme $16(k^4 + 2k^3 + k^2) \equiv 0 \pmod{16}$

et $\forall k \in \mathbb{Z}$ $k(k+1)$ est pair donc $8k(k+1) \equiv 0 \pmod{16}$

d'où

$$16(k^4 + 2k^3 + k^2) + 8k(k+1) \equiv 0 \pmod{16}$$

donc

$$n^4 \equiv 1 \pmod{16}$$

on conclut que $\forall n \in \mathbb{Z}$ $n^4 \equiv 0 \pmod{16}$ ou $n^4 \equiv 1 \pmod{16}$.

② Soit $N = a^4 + b^4$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ et $a \wedge b = 1$

d'après ce qui précède $a^4 \equiv 0 \pmod{16}$ ou $a^4 \equiv 1 \pmod{16}$

et $b^4 \equiv 0 \pmod{16}$ ou $b^4 \equiv 1 \pmod{16}$

donc on a

$$\begin{cases} a^4 \equiv 0 \pmod{16} \\ b^4 \equiv 0 \pmod{16} \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} a^4 \equiv 1 \pmod{16} \\ b^4 \equiv 0 \pmod{16} \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} a^4 \equiv 0 \pmod{16} \\ b^4 \equiv 1 \pmod{16} \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} a^4 \equiv 1 \pmod{16} \\ b^4 \equiv 1 \pmod{16} \end{cases}$$

Le cas $\begin{cases} a^4 \equiv 0 \pmod{16} \\ b^4 \equiv 0 \pmod{16} \end{cases}$ est exclu car $a \wedge b = 1$

si $\begin{cases} a^4 \equiv 1 \pmod{16} \\ b^4 \equiv 0 \pmod{16} \end{cases}$ ou $\begin{cases} a^4 \equiv 0 \pmod{16} \\ b^4 \equiv 1 \pmod{16} \end{cases}$

donc $a^4 + b^4 \equiv 1 \pmod{16}$

d'où $N \equiv 1 \pmod{16}$

si $\begin{cases} a^4 \equiv 1 \pmod{16} \\ b^4 \equiv 1 \pmod{16} \end{cases}$

donc $a^4 + b^4 \equiv 2 \pmod{16}$

d'où $N \equiv 2 \pmod{16}$

on conclut que $N \equiv 1 \pmod{16}$ ou $N \equiv 2 \pmod{16}$

③ A retenir Δ

si p est premier tel que $p > 2$ ($p \geq 3$) alors p est impair

① on pose $d = p \wedge a$

$$\Rightarrow d/p \text{ et } d/a$$

$$\Rightarrow d/N \text{ et } d/a^4 \quad (\text{car } p/N)$$

$$\Rightarrow d/a^4 + b^4 \text{ et } d/a^4$$

$$\Rightarrow d/a^4 + b^4 - a^4 \text{ et } d/a^4$$

$$\Rightarrow d/a^4 \text{ et } d/b^4$$

$$\Rightarrow d/a^4 \wedge b^4$$

Δ

$$d/a \text{ et } d/b$$

$$\Rightarrow d/(\alpha a + \beta b) \in \mathbb{Z}^2$$

pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$

or $a^4 \wedge b^4 = 1$ (car $a \wedge b = 1$) donc $d/1$ d'où $d = 1$
de même on pose $d' = p \wedge b$

$$\Rightarrow d'/p \text{ et } d'/b$$

$$\Rightarrow d'/N \text{ et } d'/b^4 \quad (\text{car } p/N)$$

$$\Rightarrow d'/a^4 + b^4 \text{ et } d'/b^4$$

$$\Rightarrow d'/a^4 \text{ et } d'/b^4$$

$$\Rightarrow d'/a^4 \wedge b^4 \Rightarrow d'/1 \quad (\text{car } a^4 \wedge b^4 = 1)$$

② on a $a \wedge p = 1$ donc d'après BEZOUT, $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$ tq $a\alpha + p\beta = 1$
donc $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$ tq $-a\alpha = -p\beta - 1$
donc $\exists \alpha \in \mathbb{Z}$ tq $-a\alpha = -1 + p(-\beta)$

$$\text{d'où } \exists c \in \mathbb{Z} \quad (c = -\beta) \quad ac \equiv -1 \pmod{p}$$

Deduction : on a d'après ce qui précède $ac \equiv -1 \pmod{p}$

$$\Rightarrow a^4 c^4 \equiv 1 \pmod{p}$$

et comme $p/N \Rightarrow N \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow a^4 + b^4 \equiv 0 \pmod{p}$

$$\Rightarrow a^4 \equiv -b^4 \pmod{p}$$

$$\Rightarrow a^4 c^4 \equiv -b^4 c^4 \pmod{p}$$

et comme $a^4 c^4 \equiv 1 \pmod{p}$ donc $-b^4 c^4 \equiv 1 \pmod{p}$

d'où $(bc)^4 \equiv -1 \pmod{p}$, on pose donc $x = bc$

① on a p nombre premier donc d'après FERMAT $x^p \equiv x \pmod{p}$.
 $\Rightarrow x^p - x \equiv 0 \pmod{p}$ pour $x \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow x(x^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod{p}$

si $p|x \Rightarrow x \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow x^4 \equiv 0 \pmod{p}$ absurde
car $x^4 \equiv -1 \pmod{p}$
donc p ne divise pas x

donc d'après GAUSS $p \nmid x^{p-1} - 1$

$$\text{d'où } \boxed{x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}} \quad (1)$$

et comme r est le reste de la division euclidienne de p par 8
donc $\exists ! q \in \mathbb{Z} \text{ tq } p = 8q + r$

$$\begin{aligned} \text{on a } x^4 &\equiv -1 \pmod{p} \Rightarrow x^8 \equiv 1 \pmod{p} \\ &\Rightarrow x^{8q+r-1} \equiv x^{p-1} \pmod{p} \quad (r \neq 0) \\ &\Rightarrow \boxed{x^{p-1} \equiv x^{r-1} \pmod{p}} \quad (2) \end{aligned}$$

de (1) et (2) on trouve $x^{r-1} \equiv 1 \pmod{p}$

(ii) on a $p = 8q + r$ avec $1 \leq r \leq 7$
il est évident que $r \neq 0$ car p est premier
si r est pair c'est $r \in \{2, 4, 6\}$ on aura p un nombre pair
contradiction avec le fait que p est premier avec $p > 3$
(car p est impair)

donc on doit éliminer les cas où $r = 3, r = 5, r = 7$

$$\text{si } r = 3 \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow x^4 \equiv 1 \pmod{p} \text{ absurde car } x^4 \equiv -1 \pmod{p}$$

$$\text{si } r = 5 \Rightarrow x^4 \equiv 1 \pmod{p} \text{ absurde}$$

$$\text{si } r = 7 \Rightarrow x^6 \equiv 1 \pmod{p}$$

$$\begin{aligned} \text{et comme } x^4 &\equiv -1 \pmod{p} \Rightarrow x^6 \equiv -x^2 \pmod{p} \Rightarrow -x^2 \equiv 1 \pmod{p} \\ &\Rightarrow x^4 \equiv 1 \pmod{p} \text{ absurde } \boxed{c/c \Rightarrow r=1} \end{aligned}$$

Exercice 02 (Complexe)

Première partie

① pour $m = -1$, on trouve (E): $z^2 - z + 1 - i = 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(1-i) = -3 + 4i = 1 + 4i - 4 = 1 + 2(2i) + (2i)^2 = (1+2i)^2$$

donc $\Delta = d^2$ avec $d = 1+2i$

d'où $z_1 = \frac{-b+d}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-d}{2a}$

$$z_1 = \frac{1 + (1+2i)}{2} = 1+i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1 - (1+2i)}{2} = -i$$

② $(1+i)$ est solution de (E) $\Leftrightarrow m^2(1+i)^2 + m^3(1+i) + 1 - im^2 = 0$
 $\Leftrightarrow (1+i)m^3 + im^2 + 1 = 0$

on a $m = -1$ est solution de (E) $\Leftrightarrow (1+i)m^3 + (1+i)m^2 - m^2 + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow (1+i)m^2(m+1) - (m+1)(m-1) = 0$
 $\Leftrightarrow (m+1)((1+i)m^2 - m + 1) = 0$
 $\Leftrightarrow m = -1$ ou $(1+i)m^2 - m + 1 = 0$

on pose $(1+i)m^2 - m + 1 = 0$

$$\Delta = 1 - 4(1+i) = -3 - 4i = (1-2i)^2$$

donc $m = \frac{1 + 1 - 2i}{2(1+i)} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i$

ou $m = \frac{1 - 1 + 2i}{2(1+i)} = \frac{i}{1+i} = \frac{i(1-i)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

donc les valeurs de m pour lequel $u = 1+i$ est une solution de (E) sont $-1, -i, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

si $m = -1$, (E): $z^2 - z + 1 - i = 0 \Leftrightarrow u = 1+i$ ou $u = -i$

si $m = -i$, (E): $-z^2 + iz + 1 + i = 0 \Leftrightarrow u = 1+i$ et $u+v = -\frac{b}{a} = i$
 $\Leftrightarrow u = 1+i$ et $v = i - u = -1$

si $m = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ (E): $\frac{1}{2}i z^2 + \frac{1}{4}(-1+i)z + \frac{3}{2} = 0$

$\Rightarrow u = 1+i$ et $v = -\frac{b}{a} - u = -\frac{1}{2i}(-1+i) - 1 - i$

$\Rightarrow u = 1+i$ et $= -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$?

③. (a) soit (E): $m^2 z^2 + m^3 z + 1 - i m^2 = 0$

donc $\Delta = m^6 - 4 m^2 (1 - i m^2) = m^2 (m^4 + 4 i m^2 - 4)$
 $= m^2 (m^4 + 2 m^2 (2i) + (2i)^2) = m^2 (m^2 + 2i)^2$.

(b) ma $\Delta = m^2 (m^2 + 2i)^2 = d^2$ avec $d = m(m^2 + 2i)$, $m \neq 0$

comme $\Delta \neq 0$ donc $z_1 = \frac{-m^3 + m(m^2 + 2i)}{2m^2} = + \frac{i}{m}$

et $z_2 = \frac{-m^3 - m(m^2 + 2i)}{2m^2} = -m - \frac{i}{m}$

2eme partie

① (a) ma $z = \frac{m-a}{m-b} = \frac{m+m+\frac{i}{m}}{m-\frac{i}{m}} = \frac{2m^2+i}{m^2-i} = \frac{2m^2+2i+3i}{m^2-i}$
 $= \frac{2(m^2-i)+3i}{m^2-i} = 2 + \frac{3i}{m^2-i}$

donc $\bar{z} = z \iff 2 - \frac{3i}{\bar{m}^2+i} = 2 + \frac{3i}{m^2-i}$

$\iff -(m^2+i) = m^2-i \iff \bar{m}^2 + m^2 = 0 \iff 2\operatorname{Re}(m^2) = 0$

$\iff m^2 \in i\mathbb{R}$

$\iff \arg(m^2) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ ou } \arg(m^2) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

$\iff \arg(m) \equiv \frac{\pi}{4} [\pi] \text{ ou } \arg(m) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$.

(b) A, B et M sont alignés $\iff \frac{m-a}{m-b} \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$

$\iff \arg(m) \equiv \frac{\pi}{4} [\pi] \text{ ou } \arg(m) \equiv -\frac{\pi}{4} [\pi]$

$\iff \operatorname{Re}(m) = \operatorname{Im}(m) \text{ ou } \operatorname{Re}(m) = -\operatorname{Im}(m)$

$\iff y = x \text{ ou } y = -x \quad (m = x + iy)$

donc l'ensemble des points $M(m)$ pour lequel les points A, B et M sont alignés est l'union des droites d'eq: $(\Delta_1): y = x$ et $(\Delta_2): y = -x$

② $M' = R(M) \iff z' - b = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - b)$

(a) $\iff z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - b) + b = i(z - \frac{i}{m}) + \frac{i}{m} = iz + \frac{1}{m} + \frac{i}{m}$

et comme $A' = R(A)$ donc $a' = ia + \frac{1}{m} + \frac{i}{m} = i(-m - \frac{i}{m}) + \frac{1}{m} + \frac{i}{m}$
 $= -im + \frac{i}{m} + \frac{2}{m}$

$$\begin{aligned}
 \text{de plus } B' = R^{-1}(M) &\Leftrightarrow M = R(B') \Leftrightarrow m = ib' + \frac{1}{m} + \frac{i}{m} \\
 &\Leftrightarrow ib' = m - \frac{1}{m} - \frac{i}{m} \\
 &\Leftrightarrow b' = -i \left(m - \frac{1}{m} - \frac{i}{m} \right) = -im + \frac{i}{m} - \frac{1}{m} \\
 &\Leftrightarrow b' = -im + \frac{i-1}{m}
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{b} \text{ on a } M' = R(M) \Leftrightarrow m' = im + \frac{1}{m} + \frac{i}{m} = im + \frac{1+i}{m}$$

$$\text{on calcul } \frac{m' + b'}{2} = \frac{im + \frac{1+i}{m} + im + \frac{i-1}{m}}{2} = \frac{2i}{2m} = \frac{i}{m} = b$$

donc B est le milieu du segment $[B'M']$.

$$\textcircled{c} \text{ on a I le milieu de segment } [AM], \text{ donc } z_I = \frac{a+m}{2}$$

$$\text{donc } z_I = \frac{-m - \frac{i}{m} + m}{2} = -\frac{i}{2m}$$

$$\text{donc } \frac{b' - a'}{b - z_I} = \frac{-im + \frac{i-1}{m} + im + \frac{i}{m} + \frac{2}{m}}{\frac{i}{m} + \frac{i}{2m}} = \frac{-\frac{3}{m}}{\frac{3i}{2m}} = -\frac{2}{i} = 2i$$

$$\text{et comme } 2i = \left(2, \frac{\pi}{2} \right) \text{ donc } \frac{b' - a'}{b - z_I} = \left[2, \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{donc } \arg \left(\frac{b' - a'}{b - z_I} \right) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi) \text{ et } \left| \frac{b' - a'}{b - z_I} \right| = 2$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{A'B'} \right) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi) \text{ et } \frac{|b' - a'|}{|b - z_I|} = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{(A'B') \perp (BI)} \text{ et } |b' - a'| = 2|b - z_I|$$

$$\boxed{A'B' = 2BI}$$



Problème (Analyse)

1^{ère} partie, soit $n \in \mathbb{N}^*$ $f_n(x) = (1-x)^n \cdot e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} ((1-x)^n \cdot e^{2x}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\left((1-x) e^{\frac{2x}{n}} \right)^n \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{\frac{2x}{n}} - x \cdot e^{\frac{2x}{n}} \right)^n \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{\frac{2x}{n}} - \frac{n \cdot 2x}{2} \cdot e^{\frac{2x}{n}} \right)^n \\
 &= 0 \quad \left(\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^t = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} t e^t = 0 \right)
 \end{aligned}$$

Méthode 2 : posez $x = n \cdot t$
Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ si n est paire on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)^n = +\infty$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x}) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ si n est impaire, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)^n = -\infty$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x}) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = -\infty$ $\textcircled{2}$ on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$, Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-x)^n \cdot e^{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)^n \cdot \frac{e^{2x}}{x}$$

si n est pair $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)^n = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)^n \cdot \frac{e^{2x}}{x} = +\infty$ si n est impair $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)^n = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)^n \cdot \frac{e^{2x}}{x} = -\infty$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \infty$ d'où (C_{f_n}) admet une branche parabolique de direction (oy) au voisinage de $+\infty$

③ on a f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme f_n est produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ ($x \mapsto (1-x)^n$, et $x \mapsto e^{2x}$)

et on a $\forall x \in \mathbb{R} : f'_n(x) = -n(1-x)^{n-1} + 2(1-x)^n \cdot e^{2x}$
 $= (1-x)^{n-1} (-n + 2(1-x)) \cdot e^{2x}$
 $= (1-x)^{n-1} (-2x + 2 - n) \cdot e^{2x}$

pour $n=1$ $f'_1(x) = (1-2x) \cdot e^{2x}$
 comme $e^{2x} > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc le signe de $f'_1(x)$ est celui de $(1-2x)$

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f'_1(x)$	+	0	-
$f_1(x)$	0	$\nearrow \frac{e}{2}$	$\searrow -\infty$

pour $n=2$ $f'_2(x) = -2x(1-x) \cdot e^{2x}$
 $= 2x(x-1) \cdot e^{2x}$

le signe de $f'_2(x)$ est celui de $2x(x-1)$ car $e^{2x} > 0$, pour $x \in \mathbb{R}$

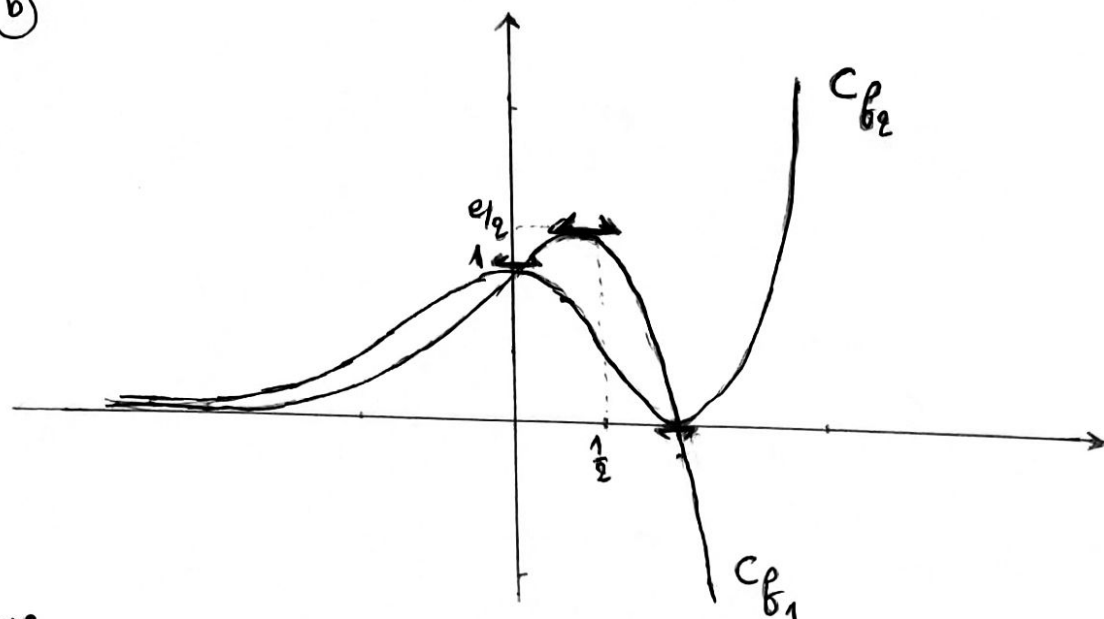
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'_2(x)$	+	0	-	+
$f_2(x)$	0	$\nearrow 1$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$

④. a) soit $x \in \mathbb{R}$ $f_2(x) - f_1(x) = (1-x)^2 e^{2x} - (1-x) e^{2x}$
 $= (1-x) e^{2x} (1-x-1) = x(x-1) \cdot e^{2x}$
 comme $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{2x} > 0$, donc le signe de $f_2(x) - f_1(x)$ est de même que $x(x-1)$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	+	0	-	+
position relative de C_{f_1} et C_{f_2}	C_{f_2} est au dessus de C_{f_1}		C_{f_2} est au dessous de C_{f_1}	C_{f_2} est au dessus de C_{f_1}

de (C_{f_2}) coupe (C_{f_1}) en deux points $A(0, 1)$ et $B(1, 0)$.

④ ⑥

2^{ème} Partie

①. a) $t \mapsto f_1(t)$ est continue sur $]-\infty, 0[$
 $t \mapsto \frac{1}{1+e^{2t}}$ est continue sur $]-\infty, 0[$.

donc $t \mapsto \frac{f_1(t)}{1+e^{2t}}$ est continue sur $]-\infty, 0[$

donc $t \mapsto \frac{f_1(t)}{1+e^{2t}}$ admet une fonction primitive sur $]-\infty, 0[$

donc $F(x) = G(0) - G(x)$

d'autre part $t \mapsto f_1(t)$ et $t \mapsto \frac{1}{1+e^{2t}}$ sont dérivables sur $]-\infty, 0[$

donc $t \mapsto \frac{f_1(t)}{1+e^{2t}}$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$

donc G est dérivable sur $]-\infty, 0[$

donc F est dérivable sur $]-\infty, 0[$

et on a $\forall x \in]-\infty, 0[\quad F'(x) = -G'(x) = -\frac{f_1(x)}{1+e^{2x}}$
 $= -\frac{(1-x)e^{2x}}{1+e^{2x}} = (x-1)\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$

⑥ Variations de F

comme $x \in]-\infty, 0]$ donc $x \leq 0$ d'où $x-1 \leq -1 < 0$
 et on a $\forall x \in]-\infty, 0]$ $\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} > 0$ donc $F'(x) < 0, x \in]-\infty, 0]$

donc F est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$

② (a) soit $x < 0$, et on a $x \leq t \leq 0 \Rightarrow 2x \leq 2t \leq 0$
 $\Rightarrow 1+e^{2x} \leq 1+e^{2t} \leq 1+1$
 $\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+e^{2t}} \leq \frac{1}{1+e^{2x}}$

et on a $\forall x \leq t \leq 0$ $f_1(t) > 0$

$$\text{donc } \frac{1}{2} f_1(t) \leq \frac{f_1(t)}{1+e^{2t}} \leq \frac{f_1(t)}{1+e^{2x}}$$

$$\Rightarrow \int_x^0 \frac{1}{2} f_1(t) dt \leq \int_x^0 \frac{f_1(t)}{1+e^{2t}} dt \leq \int_x^0 \frac{f_1(t)}{1+e^{2x}} dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int_x^0 f_1(t) dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}} \int_x^0 f_1(t) dt$$

$$\textcircled{b} I = \int_x^0 f_1(t) dt = \int_x^0 (1-t)e^{2t} dt$$

$$\begin{cases} U'(x) = e^{2x} \\ V(x) = 1-t \end{cases}$$

$$U(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$V'(x) = -1$$

$$\text{donc } I = \left[(1-t) \cdot \frac{1}{2} e^{2t} \right]_x^0 + \frac{1}{2} \int_x^0 e^{2t} dt$$

$$= \left[\frac{1-t}{2} \cdot e^{2t} \right]_x^0 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_x^0 = \frac{1}{2} - \frac{1-x}{2} \cdot e^{2x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{2x}$$

$$\text{donc } I = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{3}{4} e^{2x}$$

③ on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^{2x}} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 f_1(t) dt = \frac{3}{4}$ (car $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-2x}} = 0$)
 et on a $\frac{1}{2} \int_x^0 f_1(t) dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}} \int_x^0 f_1(t) dt$ donc $\left| \frac{3}{8} \leq F \leq \frac{3}{4} \right|$

3^{ème} Partie

① a) soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $U_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ avec $f_n(x) = (1-x)^n \cdot e^{2x}$

si $0 < x < 1 \Rightarrow 1-x > 0$ et on a $e^{2x} > 0$

$\Rightarrow (1-x)^n \cdot e^{2x} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \int_0^1 (1-x)^n \cdot e^{2x} > 0 \Rightarrow U_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

② b) soit $n \in \mathbb{N}^*$ $f_{n+1}(x) - f_n(x) = (1-x)^{n+1} \cdot e^{2x} - (1-x)^n \cdot e^{2x}$

$$= (1-x)^n e^{2x} (1-x-1)$$

$$= -x \cdot e^{2x} (1-x)^n$$

on a $x \in [0, 1) \Rightarrow x \geq 0$ et $x \leq 1$

$\Rightarrow -x \leq 0$ et $(1-x)^n \geq 0$ et $e^{2x} \geq 1 > 0$

$\Rightarrow -x (1-x)^n \cdot e^{2x} \leq 0$

③ c) on a $\forall x \in [0, 1), \forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$

donc

$$f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \Rightarrow \int_0^1 f_{n+1}(x) dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \leq U_n$$

② a) on a $U_{n+1} = \int_0^1 f_{n+1}(x) dx = \int_0^1 (1-x)^{n+1} \cdot e^{2x} dx$ $\Rightarrow (U_n)$ est décroissante.

$$\begin{cases} u'(x) = e^{2x} \\ v(x) = (1-x)^{n+1} \end{cases}$$

$$u(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$v'(x) = -(n+1) \cdot (1-x)^n$$

$$U_{n+1} = \left[(1-x)^{n+1} \cdot \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 + \frac{(n+1)}{2} \cdot \int_0^1 (1-x)^n \cdot e^{2x} dx$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} \cdot U_n$$

$$\textcircled{b} S = \left(\int_0^1 |f_2(x) - f_1(x)| dx \right) \cdot \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

et comme (C_{f_2}) est dessous de (C_{f_1}) sur l'intervalle $[0,1]$

$$\text{donc } \forall x \in [0,1] \quad f_2(x) \leq f_1(x)$$

$$\text{d'où } |f_2(x) - f_1(x)| = -f_2(x) + f_1(x)$$

$$\text{de plus } \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| = 4 \text{ cm}^2$$

$$\begin{aligned} \text{donc } S &= 4 \left(\int_0^1 f_1(x) dx - \int_0^1 f_2(x) dx \right) \text{ cm}^2 \\ &= 4 (U_1 - U_2) \cdot \text{cm}^2 \end{aligned}$$

$$\text{et d'après ce qui précède } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} \cdot U_n$$

$$\text{pour } n=1 \text{ on a } U_2 = -\frac{1}{2} + U_1$$

$$\text{càd } U_1 - U_2 = \frac{1}{2}$$

on conclut que

$$\boxed{S = 2 \text{ cm}^2}$$

$$\textcircled{3} \text{ on a } (U_n) \text{ est décroissante donc } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq U_{n+1} \leq U_n$$

$$\text{donc } 0 \leq -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} \cdot U_n \leq U_n$$

$$\text{donc } \frac{1}{2} \leq \frac{n+1}{2} U_n \text{ et } \frac{n+1}{2} \cdot U_n \leq U_{n+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{n+1} \leq U_n \text{ et } \frac{n+1}{2} \cdot U_n - U_n \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{n+1} \leq U_n \text{ et } (n-1)U_n \leq 1$$

$$\frac{1}{n+1} \leq U_n \text{ et } U_n \leq \frac{1}{n-1}$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n+1} \leq U_n \leq \frac{1}{n-1}$$

$$\text{on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n-1} = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 3 \quad d_n \geq 2^{n-3} \cdot d_3$$

$$\text{et comme } \sum_{i=0}^{+\infty} (2^{n-3}) = +\infty \quad \text{car } 2 > 1$$

$$\text{et } d_3 > 0 \quad \text{donc } \sum_{i=0}^{+\infty} (2^{n-3} d_3) = +\infty$$

$$\text{d'où } \sum_{i=0}^{+\infty} d_n = +\infty$$

⑥ supposons que (V_n) est convergente

et on a d'après ce qui précède (U_n) est convergente

donc $|V_n - U_n|$ est convergente

car d_n est convergente, contradiction avec le fait que $\sum_{i=0}^{+\infty} d_n = +\infty$

donc (V_n) est divergente.

4^{ème} Partie

① a) pour $n=1 \quad \frac{2^0}{1!} \leq 1$ vérifiée

soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$

et on montre que $\frac{2^n}{(n+1)!} \leq 1$

$$\text{on a } n \geq 1 \Rightarrow n+1 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{n+1} \leq 1$$

et on a par hypothèse $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$

$$\text{donc } \frac{2}{n+1} \cdot \frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$$

$$\text{d'où } \frac{2^n}{(n+1)!} \leq 1$$

donc d'après le principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$

Méthode 2
 $\frac{n!}{2} > 3^{n-2}$

⑥ on a $W_n = \frac{2^n}{n!} U_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{2^n}{n!} U_n \leq 2U_n$ (car $U_n > 0$)

donc $W_n \leq 2U_n$ avec $U_n = \int_0^1 (1-x)^n \cdot e^{2x} dx$

comme $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq e^{2x} \leq e^2$

et $(1-x)^n > 0 \Rightarrow (1-x)^n \cdot e^{2x} \leq e^2 (1-x)^n$

$\Rightarrow U_n \leq \int_0^1 e^2 (1-x)^n dx$

et on a $\int_0^1 (1-x)^n dx = \left[-\frac{1}{n+1} (1-x)^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

donc $U_n \leq e^2 \cdot \frac{1}{n+1} \Rightarrow U_n \leq \frac{e^2}{n+1}$

d'où $W_n \leq \frac{2e^2}{n+1}$

on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $0 \leq W_n \leq \frac{2e^2}{n+1}$

et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2e^2}{n+1} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0$

② ① on a $W_n = \frac{2^n}{n!} \cdot U_n$ donc $W_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot U_{n+1}$

donc $W_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \left(-\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} \cdot U_n \right)$
 $= -\frac{2^n}{(n+1)!} + \frac{2^n}{n!} \cdot U_n = -\frac{2^n}{(n+1)!} + W_n$

② soit $x \in \mathbb{R}$ $\left(\left(\frac{3}{2} - x \right) \cdot e^{2x} \right)' = -e^{2x} + 2 \left(\frac{3}{2} - x \right) \cdot e^{2x}$
 $= e^{2x} (-1 + 3 - 2x) = 2e^{2x} (1-x) = 2f(x)$

$$\text{ona } w_1 = \frac{2^1}{1!} L_1 = 2 \cdot L_1 = 2 \int_0^1 (1-x) e^{2x} dx = 2 \int_0^1 f_1(x) dx \\ = \int_0^1 2 f_1(x) dx = \left[\left(\frac{3}{2} - x \right) e^{2x} \right]_0^1 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{3}{2} e^0 = \frac{1}{2} (e^2 - 3)$$

© pour $n=1$, $w_1 = \frac{1}{2} (e^2 - 3)$ et $\frac{1}{2} \left(e^2 - \sum_{k=0}^1 \frac{2^k}{k!} \right) = \frac{1}{2} (e^2 - 3)$ just
soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $w_n = \frac{1}{2} \left(e^2 - \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} \right)$

$$\text{et on montre que } w_{n+1} = \frac{1}{2} \left(e^2 - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2^k}{k!} \right)$$

$$\text{ona } w_{n+1} = - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + w_n = - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{1}{2} \left(e^2 - \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} \right) \\ = \frac{1}{2} \left(e^2 - \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \right) \\ = \frac{1}{2} \left(e^2 - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2^k}{k!} \right) \quad \text{C.Q.F.D}$$

$$\text{done } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad w_n = \frac{1}{2} \left(e^2 - \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} \right)$$

④ ona $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(e^2 - \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} \right) = 0$$

$$\text{d'ou } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} = e^2$$

Fin
à la prochaine fois

Exercice 1 (Equations différentielles)

①. on a (E): $y'' - 6y' + 8y = 0$

donc l'équation caractéristique associée à (E) est $r^2 - 6r + 8 = 0$

d'où $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(8) = 4$

comme $\Delta > 0$ donc $r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 4$ et $r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 2$

donc les solutions de l'éq. diff. (E) sont de la forme:

$$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x} = \alpha e^{4x} + \beta e^{2x} \quad | (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

②a on pose $f(x) = \alpha e^{4x} + \beta e^{2x}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

on a $f(0) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1$

de plus $f'(x) = 4\alpha e^{4x} + 2\beta e^{2x}$

donc $f'(0) = 3 \Leftrightarrow 4\alpha + 2\beta = 3$

d'où les réels α et β vérifient le système
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 4\alpha + 2\beta = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \text{ et } \beta = \frac{1}{2}$$

donc $f(x) = \frac{1}{2} e^{4x} + \frac{1}{2} e^{2x}$.

⑥ Comme f est solution de (E) donc f vérifie $f''(x) - 6f'(x) + 8f(x) = 0$

donc
$$\int (f''(x) - 6f'(x) + 8f(x)) dx = 0$$

donc
$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= -\frac{1}{8} \int (f''(x) - 6f'(x)) dx \\ &= -\frac{1}{8} (f'(x) - 6f(x) + c) \end{aligned}$$

avec $c \in \mathbb{R}$

alors
$$\int f(x) dx = -\frac{1}{8} \left(2e^{4x} + e^{2x} - 3e^{4x} - 3e^{2x} + c \right)$$

$$\int f(x) dx = \frac{1}{8} e^{4x} + \frac{1}{8} e^{2x} + c$$

avec $c \in \mathbb{R}$

Exercice 2 (Nombres complexes)

① si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, alors les affixes α , $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$ sont des réels.
donc les points M, N et P sont alignés sur l'axe $(O, \vec{u})$.

② MNAP est un parallélogramme $\Leftrightarrow \vec{MN} = \vec{PA}$
 $\Leftrightarrow z_M - z_N = z_A - z_P$
 $\Leftrightarrow \frac{3}{2}\alpha^2 - \alpha = -2 - \frac{8}{\alpha}$
 $\Leftrightarrow \frac{3}{2}\alpha^2 - \alpha + \frac{8}{\alpha} + 2 = 0$
 $\Leftrightarrow 3\alpha^3 - 2\alpha^2 + 16 + 4\alpha = 0$
 $\Leftrightarrow 3\alpha^2 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 16 = 0$

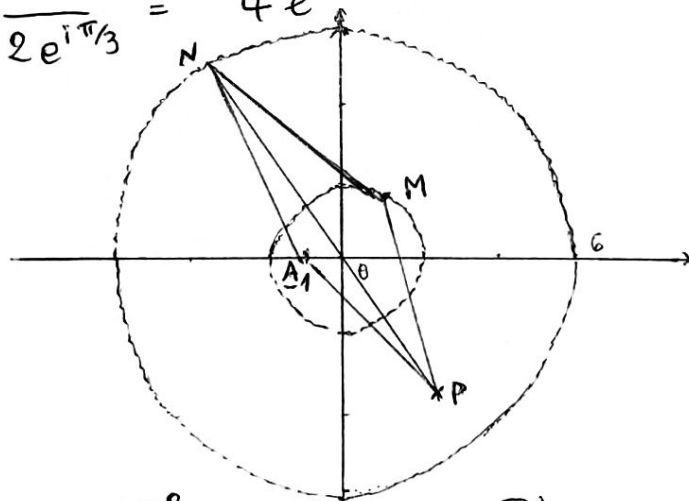
donc α est solution de (E)

③ a) on a $\alpha = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\pi/3}$

donc $\frac{3}{2}\alpha^2 = \frac{3}{2}\left(2e^{i\pi/3}\right)^2 = \frac{3}{2}\left(4e^{2i\pi/3}\right) = 6e^{2i\pi/3}$

et $\frac{8}{\alpha} = \frac{8}{2e^{i\pi/3}} = 4e^{-i\pi/3}$

⑥



⑦ $\frac{3}{2}\alpha^2 = \frac{3}{2}(1 + i\sqrt{3})^2 = \frac{3}{2}(-2 + 2i\sqrt{3}) = -3 + 3i\sqrt{3}$

$\frac{8}{\alpha} = 4e^{-i\pi/3} = 4\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 - 2i\sqrt{3}$

⑧ Aff($\vec{MN}$) = $z_M - z_N = -3 + 3i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3} = -4 + 2i\sqrt{3}$

Aff($\vec{PA}$) = $z_A - z_P = -2 - 2 + 2i\sqrt{3} = -4 + 2i\sqrt{3}$

donc Aff($\vec{MN}$) = Aff($\vec{PA}$) $\Rightarrow \vec{MN} = \vec{PA}$

de plus les points ne sont pas alignés, donc MNAP est un parallélogramme.

④ a) α est solution de (E) $\Rightarrow 3\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 16 = 0$.
 $\Rightarrow \overline{3\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 16} = 0$
 $\Rightarrow 3\bar{\alpha}^3 - 2\bar{\alpha}^2 + 4\bar{\alpha} + 16 = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \bar{\bar{z}} = z \\ \text{si } z \in \mathbb{R} \end{array} \right)$
 $\Rightarrow 3(\bar{\alpha})^3 - 2(\bar{\alpha})^2 + 4\bar{\alpha} + 16 = 0 \quad (\bar{\bar{z}} = z)$
 $\Rightarrow \bar{\alpha}$ est solution de (E).

⑥ d'après ce qui précède si MNAP est un parallélogramme alors α est solution de (E).

Les solutions de (E) sont $1 + i\sqrt{3}$, $1 - i\sqrt{3}$ et une troisième solution qui est nécessairement réelle.

or α n'est pas réel, il en résulte que :

si MNAP est un parallélogramme alors $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ ou $\alpha = 1 - i\sqrt{3}$
 pour $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$, MNAP est un parallélogramme
 de même si $\alpha = 1 - i\sqrt{3}$, MNAP est un parallélogramme
 (à vérifier).

Exercice 3 (Arithmétique)

① a) 53 est premier et $x \wedge 53 = 1$
 donc d'après le théorème de Fermat $x^{52} \equiv 1 \pmod{53}$.

b) soit $k \in \mathbb{N}$, on a $x^{52k+1} = (x^{52})^k \cdot x$
 on a $x^{52} \equiv 1 \pmod{53}$
 donc $x^{52k} \equiv 1 \pmod{53}$ d'où $x^{52k+1} \equiv x \pmod{53}$

② on a $(2^9)^{29} = 2^{261}$ et $261 = 52 \times 5 + 1$

et comme 2 est premier avec 53
 donc d'après 1/b) $(2^9)^{29} \equiv 2^9 \pmod{53}$

d'où 2^9 est solution de l'équation (E₁).

③ a) on pose $d = x \wedge 53$
 donc $d/x \Rightarrow d/x^{29}$ et comme $d/53$ donc $d/2$ (car $x^{29} \equiv 2 \pmod{53}$)
 d'où $d = 1$ ou $d = 2$ et comme 2 ne divise pas 53 alors $d = 1$

⑥ on a x solution de (E_1)

donc x est premier avec 53 (d'après 3) a)).

et comme $261 = 5 \times 52 + 1$ donc $x^{261} \equiv x \pmod{53}$ d'après 1) b)

⑦ x est solution de (E_1) donc $x^{29} \equiv 2 \pmod{53}$

$$\text{d'où } (x^{29})^9 \equiv 2^9 \pmod{53}$$

$$\text{donc } x^{261} \equiv 2^9 \pmod{53} \quad (1) \quad ((29)^9 = 261)$$

et on a d'après 3) b) $x^{261} \equiv x \pmod{53} \quad (2)$

$$\text{donc } x \equiv 2^9 \pmod{53} \quad (\text{d'après } (1) \text{ et } (2))$$

④ a) on a $2^9 = 512 = 9 \times 53 + 35$

$$\text{donc } 2^9 \equiv 35 \pmod{53}.$$

⑥ si x est solution de (E_1) alors $x \equiv 2^9 \pmod{53}$ (d'après 3) c))

$$\text{si } x \equiv 2^9 \pmod{53} \text{ donc } x^{29} \equiv (x^9)^{29} \pmod{53}$$

$$\text{et comme } (2^9)^{29} \equiv 2 \pmod{53} \quad (\text{car } 2^9 \text{ est solution de } (E_1))$$

$$\text{alors } x^{29} \equiv 2 \pmod{53}$$

D'où x est solution de (E_1) .

conclusion x solution de $(E_1) \iff x \equiv 2^9 \pmod{53}$.

⑧ Soit $(E_2): 71x - 53y = 1$

$$\text{on } 71 \times 3 - 53 \times 4 = 213 - 212 = 1$$

donc le couple $(3, 4)$ est solution de (E_2) .

⑨ Méthode (1)

soit (u, v) solution de (E_2) , on a $71u - 53v = 1$ et $71 \times 3 - 53 \times 4 = 1$

$$\Rightarrow 71u - 53v = 71 \times 3 - 53 \times 4$$

$$\Rightarrow 71(u - 3) = 53(v - 4)$$

$$\Rightarrow 53 \mid 71(u - 3) \quad (\text{comme } v - 4 \in \mathbb{Z})$$

et comme $53 \wedge 71 = 1$, donc d'après Gauss $53 \mid (u-3)$
 $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } u-3 = 53k$
 $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } u = 3 + 53k$

d'autre part $71(u-3) = 53(v-4)$
 $\Rightarrow 71(53k) = 53(v-4), k \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow 71 \cdot k = v-4, k \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow v = 4 + 71k, k \in \mathbb{Z}$

et comme $71(u-3) = 53(v-4) \Rightarrow 71(u-3) = 53(71 \cdot k)$
 $\Rightarrow u-3 = 53k$
 $\Rightarrow u = 3 + 53k, k \in \mathbb{Z}$

Réciproquement $71u - 53v = 71(3 + 53k) - 53(4 + 71k) = 1$,
 donc (u, v) solution de (E) $\Leftrightarrow \begin{cases} v = 4 + 71k \\ u = 3 + 53k \end{cases} \mid k \in \mathbb{Z}$

d'où $S = \{ (3 + 53k, 4 + 71k) \mid k \in \mathbb{Z} \}$

Méthode 2 : $(E_2) \Leftrightarrow 71u - 53v = 1 \Leftrightarrow 71u - 53v = 71 \times 3 - 53 \times 4$
 $\Leftrightarrow 71(u-3) = 53(v-4)$
 $\Leftrightarrow 53 \mid 71(u-3) \text{ et } 71(u-3) = 53(v-4)$

et puisque $53 \wedge 71 = 1$ donc d'après Gauss $53 \mid u-3$
 d'où $(E_2) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } u-3 = 53k \text{ et } 71 \times 53k = 53(v-4)$
 $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } u = 3 + 53k \text{ et } v = 4 + 71k$

c/c $S = \{ (3 + 53k, 4 + 71k) \mid k \in \mathbb{Z} \}$

⑥ Soit $x \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} x \equiv 34 \pmod{71} \\ x \equiv 2 \pmod{53} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 34 \pmod{71} \\ x \equiv 35 \pmod{53} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 34 + 71u, u \in \mathbb{Z} \\ x = 35 + 53v, v \in \mathbb{Z} \end{cases}$

donc $71u - 53v = 1$, donc (u, v) est solution de l'eq. (E₂).

Par suite il existe $k \in \mathbb{Z} \text{ tq } \begin{cases} u = 3 + 53k \\ v = 4 + 71k \end{cases} \mid k \in \mathbb{Z}$

Ainsi $x = 34 + 71(3 + 53k) = 247 + 3763k, k \in \mathbb{Z}$

Réciproquement si $x = 247 + 3763k, k \in \mathbb{Z}$ alors

$$x = 71 \times 3 + 34 \times (53k) \equiv 34 \pmod{71}$$

$$x = 35 + 53 \times 4 + 53(71k) \equiv 35 \pmod{53} \quad (2 \equiv 35 \pmod{53})$$

c/c $S = \{ 247 + 3763k \mid k \in \mathbb{Z} \}$

Problème (Analyse). Partie ①

① soit $x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{t+1} dt &= \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2-1+1}{t+1} dt = \frac{1}{x^2} \left[\int_0^x \frac{t^2-1}{t+1} dt + \int_0^x \frac{1}{t+1} dt \right] \\ &= \frac{1}{x^2} \left[\int_0^x (t-1) dt + \int_0^x \frac{1}{t+1} dt \right] \\ &= \frac{1}{x^2} \left[\left[\frac{1}{2} t^2 - t \right]_0^x + \left[\ln |t+1| \right]_0^x \right] \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{2} x^2 - x + \ln(x+1) \right) = \frac{\ln(x+1) - x}{x^2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

② soit $x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$

si $-1 < x < 0$, et soit $t \in [x, 0]$

on a $x < t < 0 \Rightarrow 0 < x+1 < t+1 < 1$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow t^2 \leq \frac{t^2}{t+1} \leq \frac{t^2}{x+1}$$

$$x < 0 \Rightarrow \int_x^0 t^2 dt \leq \int_x^0 \frac{t^2}{t+1} dt \leq \int_x^0 \frac{t^2}{x+1} dt$$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{t^2}{x+1} dt \leq \int_0^x \frac{t^2}{t+1} dt \leq \int_x^0 t^2 dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \frac{x^3}{(x+1)} \leq \int_0^x \frac{t^2}{t+1} dt \leq \frac{x^3}{3}$$

$$x^2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{x+1} \leq \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{t+1} dt \leq \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^3}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3(x+1)} \leq \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{t+1} dt \leq \frac{x}{3}$$

de même si $x \in]0, +\infty[$ on trouve $\frac{x}{3(x+1)} \leq \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{t+1} dt \leq \frac{x}{3}$

conclusion $\forall x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$ on a l'inégalité souhaitée.

③ soit $x > -1$ et $x \neq 0$

on a d'après ce qui précède $\frac{x}{3(x+1)} \leq \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{t+1} dt \leq \frac{x}{3}$

$$\Rightarrow \frac{x}{3(x+1)} \leq \frac{\ln(x+1) - x}{x^2} + \frac{1}{2} \leq \frac{x}{3}$$

$$\left(\text{car } \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{t+1} dt = \frac{\ln(x+1) - x}{x^2} - \frac{1}{2} \right) \text{ question ①}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3(x+1)} - \frac{1}{2} \leq \frac{\ln(x+1) - x}{x^2} \leq \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$$

et comme $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{3(x+1)} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - x}{x^2} = \frac{1}{2}$ (théorème des gendarmes)

Partie ②

① on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

d'autre part $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x-1}$
 $= 0 \quad \left(\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \right)$

Interprétation géométrique

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \Rightarrow C_f$ admet une asymptote verticale d'éq: $x=0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow C_f$ admet une asymptote horizontale d'éq: $y=0$
 au voisinage de $+\infty$

② a) on a $x \mapsto \ln x$ est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$

et $x \mapsto x-1$ est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$

de plus $x-1 \neq 0$ pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$

donc f est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ (par opération)

Étudions la continuité de f en 1.

on sait que $\lim_{n \rightarrow 1} \frac{\ln n}{n-1} = 1$, donc $\lim_{n \rightarrow 1} f(n) = 1 = f(1)$
 d'où f est continue en 1

on conclut que f est continue sur $]0, +\infty[$

$$\textcircled{b} \text{ on a } \lim_{n \rightarrow 1} \frac{f(n) - f(1)}{n-1} = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\frac{\ln n}{n-1} - 1}{n-1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\ln n - n + 1}{(n-1)^2}$$

$$\stackrel{t=n-1}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1) - t}{t^2} = -\frac{1}{2} \quad \left(\text{d'après par la question 3} \right)$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow 1} \frac{f(n) - f(1)}{n-1} = -\frac{1}{2}$$

donc f est dérivable en 1 et C_f admet une tangente au point $(1, f(1))$ de coefficient directeur $-\frac{1}{2} = f'(1)$.

$\textcircled{3} \textcircled{a}$ par opérations des fonctions dérivées, on trouve que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a

$$\begin{aligned} \forall x > 0, x \neq 1 \\ f'(x) &= \left(\frac{\ln x}{x-1} \right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot (x-1) - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{\frac{x-1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x-1 - x \cdot \ln x}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$\textcircled{b}$ soit $h(x) = (x-1) - x \ln x$, pour tout $x \in]0, +\infty[$

h est dérivable sur $]0, +\infty[$ (comme somme de deux fct dériv.)
 et on a $\forall x > 0 \quad h'(x) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$		0	-
$h(x)$	-1	0	$-\infty$

d'après le tableau de variations de h , on remarque la fonction h admet une valeur maximale en 1

$$\text{donc } \forall x > 0 \quad h(x) \leq h(1)$$

$$\text{c'ad } \forall x > 0 \quad h(x) \leq 0$$

$$\text{et comme } h(1) = 1 - 1 - 1 \ln 1 = 0$$

$$\text{donc } \forall x > 0, x \neq 1, h(x) < 0$$

$$\text{c'ad } \forall x > 0, x \neq 1 \quad (x-1) - x \ln x < 0$$

Tableau de variation de f

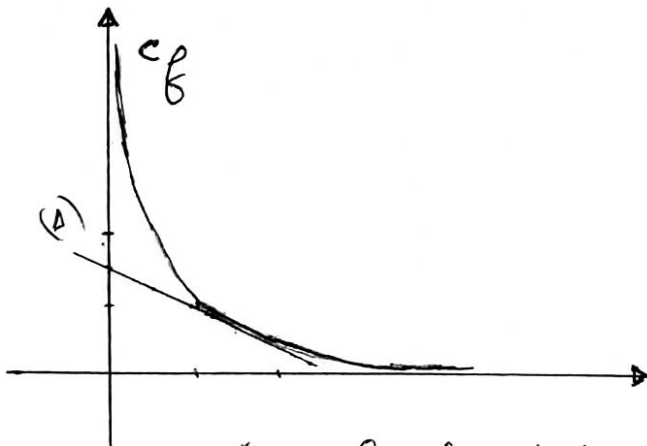
$$\text{sur } \forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[\quad f'(x) = \frac{x-1-x \ln x}{x(x-1)^2}$$

$$\text{comme } x(x-1)^2 > 0 \text{ pour tout } x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$\text{et } x-1-x \ln x < 0 \text{ pour tout } x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$\text{donc } f'(x) < 0 \text{ pour tout } x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	$+\infty$	1	0



- ⑥ soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto f(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$
 Donc f est bijectif de $]0, +\infty[$ vers un intervalle $J = f(]0, +\infty[)$ avec $J =]0, +\infty[$
 Puisque $1 + \frac{1}{n} \in]0, +\infty[$, alors l'image $1 + \frac{1}{n}$ admet un unique antécédent $\alpha_n \in]0, +\infty[$ par la fonction α_n
 D'où $\forall n \in \mathbb{N}^* \exists ! \alpha_n \in]0, +\infty[$ tq $f(\alpha_n) = 1 + \frac{1}{n}$.

⑥ a) on a déjà $\alpha_n > 0$, donc il suffit donc de montrer que $\alpha_n < 1$.

$$\text{on a } f(1) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 + \frac{1}{n} > 1 \\ \text{donc } \forall n \in \mathbb{N} \quad f(\alpha_n) > f(1)$$

et comme f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$

$$\text{alors } \alpha_n < 1$$

$$\text{dc } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 < \alpha_n < 1.$$

$$\text{⑥ soit } n \in \mathbb{N}^*, \quad f(\alpha_{n+1}) - f(\alpha_n) = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)}$$

$$\text{comme } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad -\frac{1}{n(n+1)} < 0 \text{ alors } f(\alpha_{n+1}) - f(\alpha_n) < 0 \\ \text{donc } f(\alpha_{n+1}) < f(\alpha_n)$$

et puisque f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$

$$\text{alors } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \alpha_{n+1} > \alpha_n$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (\alpha_n)$ est strictement croissante.

Deduction

Comme $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante et majorée par 1 (d'après ce qui précède),

donc $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ est convergente.

⑦ D'après ce qui précède $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ est convergente

$$\text{posons } l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$$

$$\text{puisque } \forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_n > \alpha_1 \text{ et } \alpha_1 > 0 \text{ alors } l \geq \alpha_1 > 0 \\ \text{on a } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(\alpha_n) = 1 + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ \Rightarrow f(l) = 1 \quad (\text{car } f \text{ est continue sur }]0, +\infty[)$$

et comme $f(1) = 1$ et f est bijective, donc $l = 1$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n) = 1$

(d) D'après la première partie, on sait que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

si on pose $t = x+1$ on trouve $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln(t) - (t-1)}{(t-1)^2} = -\frac{1}{2}$

posons $\varphi(t) = \frac{\ln(t) - (t-1)}{(t-1)^2} + \frac{1}{2}$ pour tout $t > 0$

$$\Rightarrow \ln(t) = (t-1) - \frac{(t-1)^2}{2} + (t-1) \cdot \varphi(t)$$

si $t \rightarrow 1$ on aura $\varphi(t) \rightarrow 0$

donc $\forall t > 0, t \neq 1$ on a $f(t) = 1 - \frac{t-1}{2} + (t-1) \cdot \varphi(t)$

en particulier $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f(\alpha_n) = 1 + \frac{\alpha_n - 1}{2} + (\alpha_n - 1) \cdot \varphi(\alpha_n)$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} = 1 + \frac{\alpha_n - 1}{2} + (\alpha_n - 1) \cdot \varphi(\alpha_n)$$

$$\Leftrightarrow n(1 - \alpha_n) = \frac{1}{\frac{1}{2} - \varphi(\alpha_n)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{2} - \varphi(\alpha_n)} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (n(1 - \alpha_n)) = 2$$

$$\left(\text{car } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\alpha_n) = \lim_{t \rightarrow 1} \varphi(t) = 0 \right)$$

Déduction

$$\text{on a } f(\alpha_n) = 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow \ln(\alpha_n) = (\alpha_n - 1) \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$\Rightarrow n \ln(\alpha_n) = n(\alpha_n - 1) \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$\Rightarrow \ln(\alpha_n^n) = n(\alpha_n - 1) \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$\Rightarrow \alpha_n^n = e^{n(\alpha_n - 1) \left(1 + \frac{1}{n} \right)}$$

et comme $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \alpha_n) = 2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n(\alpha_n - 1) = -2$

et la fonction $x \mapsto e^x$ est continue en -2 donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n^n) = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$



Partie 3

① a) soit $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ si $x \in]0,1[\Rightarrow 0 < x < 1$

$$\Rightarrow 0 < x^2 < x$$

on a $\forall t \in [x^2, x] : x^2 \leq t \leq x$ et comme f est décroissante alors $f(x) \leq f(t) \leq f(x^2)$

$$\Rightarrow \int_{x^2}^x f(t) dt \leq \int_{x^2}^x f(t) dt \leq \int_{x^2}^x f(x^2) du$$

$$\Rightarrow \int_x^{x^2} f(x^2) dt \leq \int_x^{x^2} f(t) dt \leq \int_x^{x^2} f(x) dt$$

$$\Rightarrow (x^2 - x) \cdot f(x^2) \leq \int_x^{x^2} f(t) dt \leq (x^2 - x) \cdot f(x)$$

$$\Rightarrow (x^2 - x) \cdot \frac{2 \ln x}{x^2 - 1} \leq F(x) \leq (x^2 - x) \cdot \frac{\ln x}{x - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{2x \ln x}{x + 1} \leq F(x) \leq x \ln x$$

si $x \in]1,+\infty[$ on a $x > 1 \Rightarrow x^2 > x$ de même pour $t \in [x, x^2]$ on trouve l'inégalité demandée

$$\text{etc } \forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\quad \frac{2x \ln x}{x + 1} \leq F(x) \leq x \ln x$$

b) on a d'après ce qui précède $\forall x \in]0,1[\quad \frac{2x \ln x}{x + 1} \leq F(x) \leq x \ln x$

$$\text{et comme } \lim_{0^+} \frac{2x \ln x}{x + 1} = \lim_{0^+} (x \ln x) = 0$$

donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{0^+} F(x) = 0 = F(0)$
donc F est continue à droite au point 0.de plus $\forall x \in]0,1[\quad \frac{F(x)}{x} \leq \ln x$ et comme $\lim_{0^+} \ln x = -\infty$

$$\text{donc } \lim_{0^+} \frac{F(x)}{x} = -\infty \quad \text{car } \lim_{0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = -\infty$$

donc (C_F) admet une demi tangente verticale en $(0, F(0))$ dirigée ↓

② (a) soit $x > 1$, et $t \in [x, x^2] \Rightarrow x \leq t \leq x^2$

$$\Rightarrow \ln x \leq \ln t \leq \ln x^2 \quad \left(\text{car } \ln \text{ est } \uparrow \text{ sur }]0, +\infty[\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\ln x}{t-1} \leq \frac{\ln t}{t-1} \leq \frac{\ln x^2}{t-1} \quad (t > 1)$$

$$\Rightarrow \int_x^{x^2} \frac{\ln x}{t-1} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t-1} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{\ln x^2}{t-1} dt$$

et on a $\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt = \left[\ln |t-1| \right]_x^{x^2} = \ln |x^2-1| - \ln |x-1| = \ln(x+1)$

$$\text{d'où} \quad \int_x^{x^2} \frac{\ln x}{t-1} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t-1} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{\ln x^2}{t-1} dt$$

$$\Rightarrow \ln x \cdot \ln(x+1) \leq F(x) \leq \ln x^2 \cdot \ln(x+1)$$

$$\Rightarrow \ln x \cdot \ln(x+1) \leq F(x) \leq 2 \ln x \cdot \ln(x+1)$$

② (b) on a $\forall x > 1 \quad F(x) \geq \ln(x) \cdot \ln(x+1)$

et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) \cdot \ln(x+1) = +\infty$

alors par comparaison on trouve $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

de plus $\forall x > 1 \quad \ln x \cdot \ln(x+1) \leq F(x) \leq 2 \ln x \cdot \ln(x+1)$

$$\Rightarrow \frac{\ln x \cdot \ln(x+1)}{x} \leq \frac{F(x)}{x} \leq 2 \frac{\ln x \cdot \ln(x+1)}{x}$$

calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \cdot \ln(x+1)}{x}$

$$\text{on a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \cdot \ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot 2 \frac{\ln(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$$

$$= 0 \times 0 \times 1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0 \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x}} = 1 \end{array} \right)$$

$$= 0$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$$

d'où (C_F) admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des abscisses.

③ ① on a d'après la question ①. ①. ① $\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$

$$\frac{2x \ln x}{x^2-1} \leq F(x) \leq x \ln x$$

$$\Rightarrow \frac{2x \ln x}{x^2-1} \leq \frac{F(x)}{x-1} \leq \frac{x \ln x}{x-1} \quad \text{si } x > 1$$

$$\text{et} \quad \frac{x \ln x}{x-1} \leq \frac{F(x)}{x-1} \leq \frac{2x \ln x}{x^2-1} \quad \text{si } 0 < x < 1$$

$$\text{et comme } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x \ln x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \frac{\ln(x^2)}{x^2-1} = 1$$

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} = 1$$

Donc F est dérivable en $x_0 = 1$ et on a $F'(1) = 1$
 de plus f est continue sur $]0,+\infty[$ (d'après parties ① ② ③)
 donc f admet une primitive G sur $]0,+\infty[$

$$\text{donc } F(x) = \int_x^{x^2} f(t) dt = G(x^2) - G(x)$$

de plus $x \mapsto G(x)$ et $x \mapsto G(x^2)$ sont dérivables sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$

donc F est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$

$$\begin{aligned} \text{et on a} \quad F'(x) &= 2x G'(x^2) - G'(x) = 2x f(x^2) - f(x) \\ &= \frac{(3x-1) \ln x}{x^2-1}, \quad \forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\end{aligned}$$

⑥ il est facile de déterminer le signe de $3x-1$, $\ln x$, et x^2-1 sur l'intervalle $]0,+\infty[$

finalement on trouve

x	0	1/3	1	$+\infty$
$F'(x)$		-	0	+
$F(x)$	0			$+\infty$

Simili Mai 2019

①

$$f: t \rightarrow \frac{e^t}{t}$$

* f continue sur $] -\infty, 0[$ donc admet une primitive

$$G_1 \text{ sur }] -\infty, 0[$$

$$\bullet \underline{\forall x \in]0, \frac{1}{2}[} \quad 0 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow \ln x < \ln \frac{1}{2} < 0$$

$$0 < 2x < 1 \quad \ln 2x < \ln 1 = 0$$

Donc $\ln x$ et $\ln 2x \in] -\infty, 0[$

$$\forall x \in]0, \frac{1}{2}[\quad F(x) = G_1(\ln 2x) - G_1(\ln x)$$

$\ln$ dérivable sur $]0, \frac{1}{2}[$ $\ln(]0, \frac{1}{2}[) =] -\infty, \ln \frac{1}{2}[\subset] -\infty, 0[$

et $v: x \rightarrow \ln 2x$ dérivable sur $]0, \frac{1}{2}[$ composée

$$\text{et } v(]0, \frac{1}{2}[) =] -\infty, 0[$$

et G_1 dérivable sur $] -\infty, 0[$

Donc F dérivable sur $]0, \frac{1}{2}[$

* f continue sur $]0, +\infty[$ donc admet une primitive G_2 sur $]0, +\infty[$

$$\forall x \in]1, +\infty[\quad \left\{ \begin{array}{l} \ln x > 0 \\ \ln 2x > \ln 2 > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \ln x, \ln \ln x \in]0, +\infty[$$

$$\text{Donc } F(x) = G_2(\ln \ln x) - G_2(\ln x)$$

G_2 dérivable sur $]0, +\infty[$ et $u: x \rightarrow \ln x$ et $v: x \rightarrow \ln 2x$ dérivables sur $]1, +\infty[$

$$u(]1, +\infty[) =]0, +\infty[\quad \text{et} \quad v(]1, +\infty[) =]\ln 2, +\infty[\subset]0, +\infty[$$

Donc $x \rightarrow G_2(\ln 2x)$ et $x \rightarrow G_2(\ln x)$ sont dérivables sur $]1, +\infty[$ d'où F dérivable sur $]1, +\infty[$

$$b) \forall x \in]0, \frac{1}{2}[\quad F(x) = G_1(\ln 2x) - G_1(\ln x) \\ G_1'(x) = f(x) \quad F'(x) = G_1'(\ln 2x) \times (\ln 2x)' - G_1'(\ln x) \times (\ln x)'$$

$$F'(x) = f(\ln 2x) \times \frac{2}{2x} - f'(\ln x) \times \frac{1}{x}$$

$$= \frac{f(\ln 2x) - f(\ln x)}{x}$$

(2)

$$\text{de Meme } \forall x \in]1, +\infty[\quad F(x) = G_2(\ln 2x) - G_2(\ln x) \quad G_2'(x) = f(x)$$

$$F'(x) = \frac{f(\ln 2x) - f(\ln x)}{x}$$

$$\text{donc } \forall x \in]0, \frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[$$

$$F'(x) = \left(\frac{e^{\ln 2x}}{\ln 2x} - \frac{e^{\ln x}}{\ln x} \right) \times \frac{1}{x}$$

$$= \left(\frac{2x}{\ln 2x} - \frac{x}{\ln x} \right) \frac{1}{x} = \frac{2}{\ln 2x} - \frac{1}{\ln x}$$

$$= \frac{2 \ln x - \ln 2x}{(\ln x)(\ln 2x)} = \frac{\ln x^2 - \ln 2x}{\ln x \ln 2x}$$

$$= \frac{\ln \left(\frac{x^2}{2x} \right)}{(\ln x)(\ln 2x)} = \frac{\ln \left(\frac{x}{2} \right)}{(\ln x)(\ln 2x)}$$

$$2.) a) \text{ on pose } u = e^t \Leftrightarrow t = \ln u \Rightarrow dt = \frac{1}{u} du$$

$$t = \ln 2x \Rightarrow u = 2x$$

$$t = \ln x \Rightarrow u = x$$

$$\Rightarrow F(x) = \int_x^{2x} \frac{u}{\ln u} \times \frac{1}{u} du = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln u} du = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} dt$$

$$b) \quad \forall x \in]0, \frac{1}{2}[\quad \ln x \leq \ln t \leq \ln 2x$$

(3)

$$\begin{cases} \ln t \neq 0 \\ \ln x \neq 0 \\ \ln 2x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\ln 2x} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{1}{\ln x}$$

$$x \leq 2x \Rightarrow \frac{1}{\ln 2x} \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} dt \leq \frac{1}{\ln x} \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln 2x} [t]_x^{2x} \leq F(x) \leq \frac{1}{\ln x} [t]_x^{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln 2x} (2x - x) \leq F(x) \leq \frac{1}{\ln x} (2x - x)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\ln 2x} \leq F(x) \leq \frac{x}{\ln x}$$

$$3) a) \quad \forall x \in]0, \frac{1}{2}[\quad \frac{x}{\ln 2x} \leq F(x) \leq \frac{x}{\ln x}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln 2x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0 = F(0)$$

Donc F continue à droite en 0

$$b) \quad \forall x \in]0, \frac{1}{2}[\quad \frac{x}{\ln 2x} \leq F(x) \leq \frac{x}{\ln x} \quad \text{et } x > 0$$

$$\frac{1}{\ln 2x} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{1}{\ln x}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln 2x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = 0$$

Donc F dérivable à droite en 0 et $F'_d(0) = 0$.

$$c) \forall x \in]1, +\infty[$$

$$F(x) \geq \frac{x}{\ln 2x}$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{x}{\ln x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$$

$$\forall x \in]1, +\infty[\quad \frac{x}{\ln 2x} \leq F(x) \leq \frac{x}{\ln x} \quad \text{et } x > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln 2x} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{1}{\ln x}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln 2x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$$

Donc (E_f) admet une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de $+\infty$

$$40) u(t) = 2 - 2t + \ln t, \quad t \in]0, 1]$$

u continue sur $]0, \frac{1}{2}[$

t	0	$\frac{1}{2}$	1
$1-2t$	+	-	-

$$u'(t) = -2 + \frac{1}{t} = \frac{1-2t}{t} > 0 \quad \forall t \in]0, \frac{1}{2}[$$

Donc u strictement croissante sur $]0, \frac{1}{2}[$

u est une bijection de $]0, \frac{1}{2}[$ sur $u(]0, \frac{1}{2}[)$

$$u(]0, \frac{1}{2}[) =] \lim_{t \rightarrow 0^+} u(t); \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}^-} u(t) [=] -\infty, 1 - \ln 2 [$$

$$0 \in] -\infty, 1 - \ln 2 [\text{ donc } \exists ! \alpha \in]0, \frac{1}{2}[: u(\alpha) = 0$$

$$\forall t \in [\frac{1}{2}, 1] \quad u'(t) = \frac{1-2t}{t} \leq 0 \Rightarrow u \text{ strictement décroissante sur } [\frac{1}{2}, 1]$$

t	0	α	$\frac{1}{2}$	1
$u'(t)$		+	-	
u				$\rightarrow 0$

$$\forall t \in [\alpha, \frac{1}{2}] \quad \left\{ \begin{array}{l} t \geq \alpha \\ u \text{ croissante sur } [\alpha, \frac{1}{2}] \end{array} \right.$$

(5)

$$\Rightarrow u(\alpha) \geq u(\alpha) \geq 0 \Rightarrow u(t) \geq 0$$

$$\forall t \in [\frac{1}{2}, 1] \quad \left\{ \begin{array}{l} t \leq 1 \\ u \text{ décroissante sur } [\frac{1}{2}, 1] \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow u(t) \geq u(1) = 0 \Rightarrow u(t) \geq 0$$

$$\text{d'où } \forall t \in [\alpha, 1] \quad u(t) \geq 0$$

$$b) \forall x \in [\alpha, \frac{1}{2}[\quad \alpha \leq x \leq t \leq 2x < 1.$$

$$\Rightarrow u(t) \geq 0$$

$$\Rightarrow 1 - 2t + \ln t \geq 0$$

$$\Rightarrow \ln t \geq 2t - 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln t} \leq \frac{1}{2t-2}$$

$$x \leq 2x \Rightarrow \int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{2t-2} dt \quad \forall x \in [\alpha, \frac{1}{2}[$$

$$\begin{aligned} c) \text{ on a } \int_x^{2x} \frac{1}{2t-2} dt &= \frac{1}{2} \int_x^{2x} \frac{(t-1)^{-1}}{t-1} dt = \frac{1}{2} \left[\ln |t-1| \right]_x^{2x} \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln |2x-1| - \ln |x-1| \right) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2x-1}{x-1} \right| \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \left| \frac{2x-1}{x-1} \right| = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2x-1}{x-1} \right| = -\infty$$

$$\text{et } F(x) \leq \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2x-1}{x-1} \right| \text{ donc } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} F(x) = -\infty$$

5) $h(t) = \ln t - t/2 + 1 \quad \forall t > 0$

(6)

$$h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} = \frac{2-t}{2t}$$

h admet un maximum 0 en 2 donc $\forall t > 0 \quad h(t) \leq 0$

$$\Rightarrow \forall t > 0 \quad \ln t \leq t - 1$$

$$\Rightarrow t > 1 \quad 0 < \ln t \leq t - 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln t} \geq \frac{1}{t-1} \quad \forall t > 1$$

$$1 < n \Rightarrow \int_n^{2n} \frac{1}{\ln t} dt \gg \int_n^{2n} \frac{1}{t-1} dt = \left[\ln|t-1| \right]_n^{2n}$$

$$\Rightarrow F(n) \geq \ln|2n-1| - \ln|n-1|$$

$$\Rightarrow F(n) \geq \ln \left| \frac{2n-1}{n-1} \right| \quad \forall n > 1$$

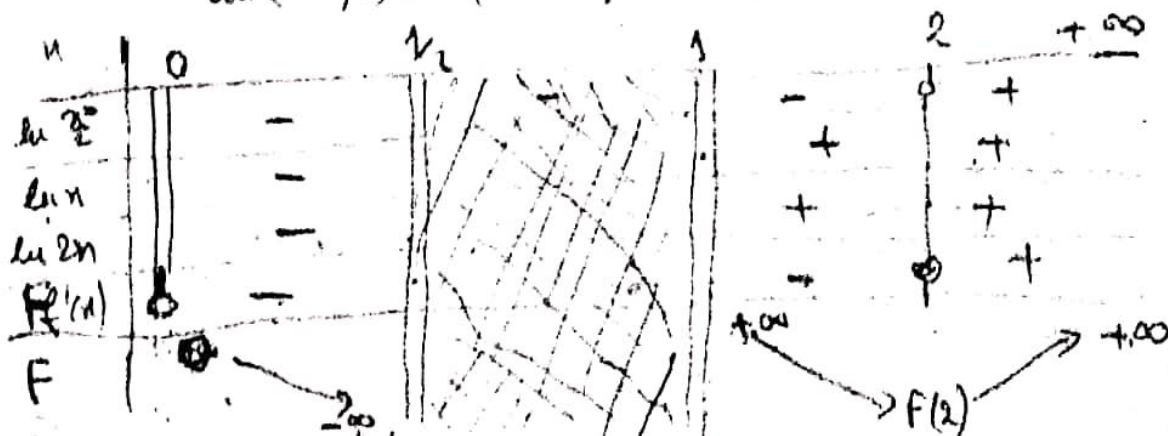
$$\lim_{n \rightarrow 1^+} \ln \left| \frac{2n-1}{n-1} \right| = +\infty \quad \left(\text{car } \lim_{n \rightarrow 1^+} \left| \frac{2n-1}{n-1} \right| = +\infty \right)$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow 1^+} F(n) = +\infty$$

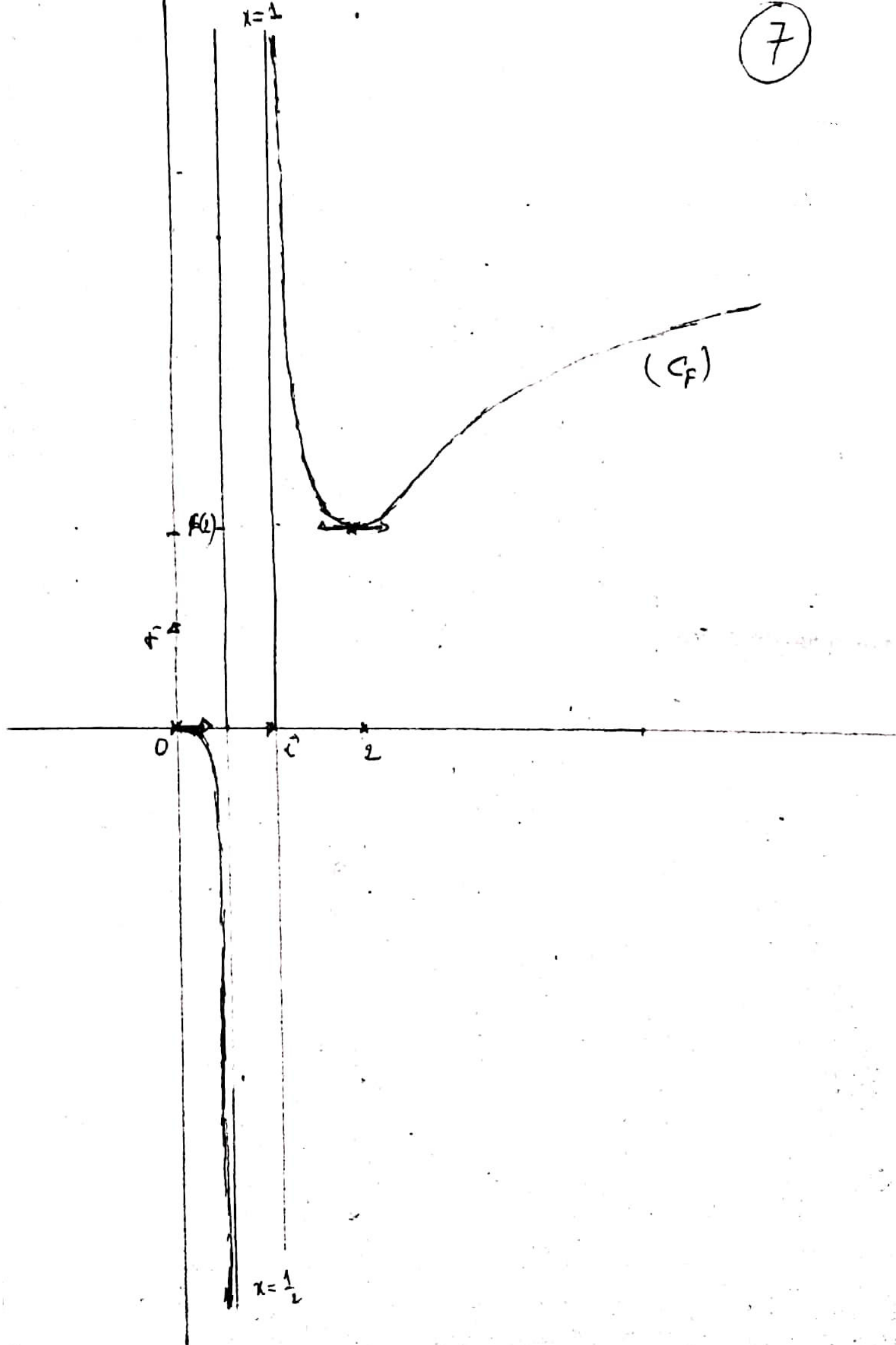
6) a) $\forall n \in]1, \frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[\quad F'(n) = \frac{\ln(\frac{n}{2})}{(\ln x)(\ln 2n)}$

$$\ln(\frac{n}{2}) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{n}{2} \geq 1 \Leftrightarrow n \geq 2$$

$$\ln(2n) \geq 0 \Leftrightarrow 2n \geq 1 \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{2}$$



7



Ex 2

(8)

$$1^o) f(x) = \ln x - \arctan x \quad (E_n): f(x) = n\pi$$

$\ln$ et $\arctan$ sont continues sur $]0, +\infty[$ donc f continue sur $]0, +\infty[$

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-n}{n(1+x^2)} \quad \text{le signe de } f'(x) \text{ est celui}$$

$$\text{de } x^2 - x + 1 \quad \text{car } x(1+x^2) > 0$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \text{ d'où } f \text{ strictement croissante}$$

sur $]0, +\infty[$ donc f bijection de $]0, +\infty[$ sur $f(]0, +\infty[)$

$$f(]0, +\infty[) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \mathbb{R}$$

$$m\pi \in \mathbb{R} \quad \text{donc } \exists ! x_n \in]0, +\infty[: f(x_n) = m\pi$$

d'où l'eq (E_n) admet une seule solution x_n dans $]0, +\infty[$

$$2^o) (\forall n \in \mathbb{N}) \quad f(e^{n\pi}) = \ln e^{n\pi} - \arctan n\pi = n\pi - \arctan n\pi$$

$$\text{on a } n\pi \geq 0 \Rightarrow \arctan n\pi \geq \arctan 0 = 0$$

$$\Rightarrow n\pi - \arctan n\pi \leq n\pi$$

$$\Rightarrow f(e^{n\pi}) \leq f(x_n) \text{ et } f \text{ est } \uparrow \text{ sur }]0, +\infty[$$

$$\Rightarrow e^{n\pi} \leq x_n$$

$$\text{on a } \begin{cases} x_n \geq e^{n\pi} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n\pi} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$$

$$3^o) f(x_n) = m\pi \Leftrightarrow \ln(x_n) - \arctan(x_n) = \ln(e^{n\pi})$$

$$\Rightarrow \ln(x_n) - \ln e^{n\pi} = \arctan(x_n)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{x_n}{e^{n\pi}}\right) = \arctan(x_n)$$

$$\text{ma: } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \ln \left(\frac{x_n}{e^{n\pi}} \right) = \arctan(x_n)$$

(9)

$$\Rightarrow \frac{x_n}{e^{n\pi}} = e$$

$$\text{ma: } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan(x_n) = \frac{\pi}{2}$$

et exp continue en $\frac{\pi}{2}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\arctan(x_n)} = e^{\pi/2}$



$$\text{d'ou } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{e^{n\pi}} = e^{\pi/2}$$

$$4) \text{ ma: } \begin{cases} f(x_n) = n\pi \\ f(x_{n+1}) = (n+1)\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(x_n) - \arctan(x_n) = n\pi \\ \ln(x_{n+1}) - \arctan(x_{n+1}) = (n+1)\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ln(x_n) = \arctan(x_n) + n\pi \\ \ln(x_{n+1}) = \arctan(x_{n+1}) + (n+1)\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ln(x_n) - \ln(x_{n+1}) = \arctan(x_n) - \arctan(x_{n+1}) - \pi$$

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} \right) = \arctan(x_n) - \arctan(x_{n+1}) - \pi$$

$$\text{d'ou } \frac{x_n}{x_{n+1}} = e$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan(x_{n+1}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan(x_n) - \arctan(x_{n+1}) - \pi = -\pi$$

et exp continue en $-\pi$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = e^{-\pi}$$

Ex3

$$E = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} c & a & b \\ 0 & c & a \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} / (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \quad (10)$$

1°) On a $E \subset M_3(\mathbb{R})$ Montrons que E est un sous espace vectoriel de $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$

Pour $a=b=c=0$ $M(0,0,0) = O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in E \Rightarrow E \neq \emptyset$

$$\forall (a,b,c,d,e,f,\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^8$$

$$\alpha M(a,b,c) + \beta M(d,e,f) = \begin{pmatrix} c & a & b \\ 0 & c & a \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} f & d & e \\ 0 & f & d \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha c + \beta f & \alpha a + \beta d & \alpha b + \beta e \\ 0 & \alpha c + \beta f & \alpha a + \beta d \\ 0 & 0 & \alpha c + \beta f \end{pmatrix}$$

$$= M(\alpha a + \beta d; \alpha b + \beta e; \alpha c + \beta f) \in E$$

$$\text{Car } (\alpha a + \beta d; \alpha b + \beta e; \alpha c + \beta f) \in \mathbb{R}^3$$

d'un E sous espace vectoriel de $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$

Donc $(E, +, \cdot)$ espace vectoriel réel.

b) $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} c & a & b \\ 0 & c & a \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= c I + a J + b K$$

Donc (I, J, K) est une famille génératrice de E

* $\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ $\alpha I + \beta J + \gamma K = O_3$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Donc (I, J, K) est une famille libre

11

D'on (I, J, K) est une base de E

Remarque $\dim E = 3$

$$2^{\circ}) a) K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $\forall (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$

$$M(a, b, c) \times M(d, e, f) = \begin{pmatrix} e & a & b \\ 0 & c & a \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f & d & e \\ 0 & f & d \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ef & cd+af & ce+ad+bf \\ 0 & cf & cd+af \\ 0 & 0 & cf \end{pmatrix}$$

$$= M(cd+af; ce+ad+bf; ef) \in E$$

$$\text{Car } (cd+af; ce+ad+bf; cf) \in \mathbb{R}^3$$

D'on E est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R}); \times)$

3^o) i) $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel

donc $(E, +)$ est un groupe commutatif

ii) E partie stable de $(M_3(\mathbb{R}); \times)$ et $\times$ associative dans $M_3(\mathbb{R})$
donc $\times$ associative dans E

iii) I est l'élément neutre dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$
et $I = M(0, 0, 1) \in E$ dans E est l'élément neutre
dans $(E; \times)$

$$\Rightarrow \forall (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6: M(a, b, c) \times M(d, e, f)$$

(12)

$$= M(cd+af; ce+ad+bf; cf)$$

$$= M(fa+dc; fb+da+ec; fc)$$

$$= M(d, e, f) \times M(a, b, c)$$

donc $\times$ commutative dans E

v) E partie stable de $(M_3(\mathbb{R}), +)$ et de $(M_3(\mathbb{R}), \times)$
et $\times$ distributive par rapport à $+$ dans $M_3(\mathbb{R})$

Donc $\times$ est distributive par rapport à $+$ dans E

De i), ii), iii), iv) et v) on en déduit que
 $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire

On a $K^2 = O_3$ et $K \neq O_3$ donc K est un diviseur
de zéro dans $(E, +, \times)$ d'où l'anneau $(E, +, \times)$
n'est pas intègre.

(Remarque $(E, *, \times)$ n'est pas un corps
car un corps est un anneau intègre.)

$$4^0) M_a = M(a; \frac{1}{2}a^2; 1) \quad G = \{M_a / a \in \mathbb{R}\}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow G$$

$$a \mapsto M_a$$

$$a) \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad f(a+b) = M_{a+b}$$

$$f(a) \times f(b) = M_a \times M_b = M(a; \frac{1}{2}a^2; 1) \times M(b; \frac{1}{2}b^2; 1)$$

d'après 2°) b)

$$= M(b+a; \frac{1}{2}b^2 + ab + \frac{1}{2}a^2; 1)$$

$$= M(a+b; \frac{1}{2}(a+b)^2; 1) = M_{a+b} = f(a+b)$$

d'un f est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(E, +)$

(13)

• $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad f(a) = f(b) \Rightarrow Ma = Mb$

$$\Rightarrow M(a, \frac{1}{2}a^2, 1) = M(b, \frac{1}{2}b^2, 1)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & \frac{1}{2}a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b & \frac{1}{2}b^2 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b \\ \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}b^2 \end{cases} \Rightarrow a = b$$

donc f injective

$$f(\mathbb{R}) = \{ f(a) \mid a \in \mathbb{R} \} = \{ M_a \mid a \in \mathbb{R} \} = G$$

donc f surjective

donc f bijection de E sur G

d'un f isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(G, +)$

b) $(\mathbb{R}, +)$ groupe commutatif } donc $(G, +)$ est un groupe commutatif.
 f isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(G, +)$

c) le symétrique de a dans $(\mathbb{R}, +)$ est $-a$ donc

le symétrique de $f(a)$ est $f(-a)$ dans $(G, +)$

$$\text{Donc } M_a^{-1} = M_{-a}$$

Ex 4

Partie A

$$(E) \quad z^2 - 4z \cos\left(\frac{3\theta}{4}\right) e^{i\frac{\theta}{4}} + 4e^{i\frac{\theta}{2}} = 0 \quad \theta \in]0, 2\pi[$$

14

$$a) \quad \Delta = 16 \cos^2\left(\frac{3\theta}{4}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} - 16 e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$= -16 e^{i\frac{\theta}{2}} \left(1 - \cos^2\left(\frac{3\theta}{4}\right)\right) = -16 e^{i\frac{\theta}{2}} \sin^2\left(\frac{3\theta}{4}\right)$$

$$= \left(4i e^{i\frac{\theta}{4}} \sin\left(\frac{3\theta}{4}\right)\right)^2$$

$$b) \quad z_1 = \frac{4 \cos\left(\frac{3\theta}{4}\right) e^{i\frac{\theta}{4}} - 4i e^{i\frac{\theta}{4}} \sin\left(\frac{3\theta}{4}\right)}{2}$$

$$= 2 e^{i\frac{\theta}{4}} \left(\cos\frac{3\theta}{4} - i \sin\frac{3\theta}{4}\right)$$

$$= 2 e^{i\frac{\theta}{4}} \left(\cos\left(-\frac{3\theta}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\theta}{4}\right)\right)$$

$$= 2 e^{i\frac{\theta}{4}} \times e^{-i\frac{3\theta}{4}}$$

$$z_1 = \boxed{2 e^{-i\frac{\theta}{2}}} = 2 \left(\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right) \neq 0$$

$$z_2 = \frac{4 \cos\left(\frac{3\theta}{4}\right) e^{i\frac{\theta}{4}} + 4i e^{i\frac{\theta}{4}} \sin\left(\frac{3\theta}{4}\right)}{2}$$

$$= 2 e^{i\frac{\theta}{4}} \left(\cos\frac{3\theta}{4} + i \sin\frac{3\theta}{4}\right) = 2 e^{i\frac{\theta}{4}} \times e^{i\frac{3\theta}{4}}$$

$$\boxed{z_2 = 2 e^{i\theta}}$$

$$c) \quad (OM_1) \perp (OM_2) \Leftrightarrow \frac{z_2}{z_1} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{2e^{i\theta}}{2e^{-i\frac{\theta}{2}}} \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow e^{i\frac{3\theta}{2}} \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\theta}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + k \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{3} \left[\frac{2\pi}{3} \right]$$

Exercice 4: Partie B

$$R(A) = B \Leftrightarrow b = e^{i\frac{\pi}{2}} \bar{z} = i \bar{z}$$

$$T(b) = \gamma' \Leftrightarrow z' = b + 2u^2 \bar{v} = i \bar{z} + 1 - i$$

$$\Leftrightarrow z' = i \bar{z} + 1 - i$$

$$2^o) f(M(z)) = M \Leftrightarrow z = i \bar{z} + 1 - i \quad \text{on pose } z = x + iy \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Leftrightarrow x + iy = i(x - iy) + 1 - i$$

$$\Leftrightarrow x + iy - ix - y = 1 - i = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y - 1) - i(x - y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y - 1 = 0$$

Donc l'ensemble des points invariants par f est la droite (D) d'équation: (D): $x - y - 1 = 0$ Le vecteur directeur $\vec{w}(1, 1)$

$$b) \frac{z' - z}{1+i} = \frac{(i \bar{z} + 1 - i - z)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{i \bar{z} + \bar{z} - z + i z - 2i}{2}$$

$$= \frac{i(z + \bar{z}) - (z - \bar{z}) - 2i}{2} = \frac{i 2 \operatorname{Re}(z) - 2i \operatorname{Im}(z) - 2i}{2}$$

$$= i(\underbrace{\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) - 1}_{\in \mathbb{R}}) \in i\mathbb{R}$$

$$\text{donc } \overrightarrow{MM'} \perp \vec{w} \quad (\exists \vec{w} = 1+i)$$

c) Soit I milieu de $[MM']$

$$z_I = \frac{z + z'}{2} = \frac{z + i \bar{z} + 1 - i}{2}$$

$$z = x + iy \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$= \frac{x+y+1}{2} + i \frac{x-y-1}{2}$$

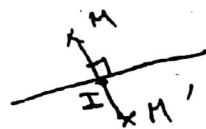
$$x_I - y_I - 1 = \frac{x+y+1}{2} - \frac{x-y-1}{2} - 1 = \frac{x+y+1-x+y+1-2}{2} = 0$$

Donc $I \in (D)$

d) $(MM') \perp (D)$

I milieu de $[MM'] \in D$

Donc f est la symétrie orthogonale d'axe (D)



Exercice 5

Partie A

k premier Fermat

$$\begin{cases} 5^k \equiv 5 [k] \\ 2^k \equiv 2 [k] \end{cases} \Rightarrow 5^k - 2^k \equiv 3 [k]$$

$$\text{et on a } 5^k - 2^k \equiv 0 [k] \Rightarrow 3 \equiv 0 [k] \Rightarrow \begin{cases} k/3 \\ k \text{ premier} \\ 3 \text{ premier} \end{cases} \Rightarrow k=3$$

2o) Si $k > 3$ d'après 1o) k ne divise pas $5^k - 2^k$ et k premier

$$\text{Donc } k \wedge (5^k - 2^k) = 1$$

Partie B $3 \leq p < q$ $(5^p - 2^p) / (5^q - 2^q) \in \mathbb{Q}$

2°) $p=3 \Rightarrow 39 / 9 \wedge 13 (5^9 - 2^9)$

$\Rightarrow 9 / 3 \wedge 13 (5^9 - 2^9) \Rightarrow 39 (5^9 - 2^9) \equiv 0 [9]$

3°) $3=p < q \Rightarrow \begin{cases} 9 \wedge 5^q - 2^q = 1 \\ 9 \wedge 3 = 1 \end{cases}$ (d'après 2° partie A)

$\Rightarrow 9/13 \Rightarrow q=13$ (9 premier et 13 premier)

2°) $p > 3 \Rightarrow p \geq 5$: si $p=5$ $5 / (5^5 - 2^5) (5^9 - 2^9)$

$5^5 - 2^5 \equiv -2^5 [5]$

$5^9 - 2^9 \equiv -2^9 [5]$

$\Rightarrow 5 / 2^{9+5} \Rightarrow 5/2$ car 5 premier

donc $p \neq 5 \Rightarrow p > 5$

$p > 5 \Rightarrow p \wedge (5^p - 2^p) = 1$ (d'après 2° partie A) $\Rightarrow p / 5^9 - 2^9$

$\Rightarrow 5^9 - 2^9 \equiv 0 [p]$

$\begin{cases} p \text{ premier } p > 5 \\ p \wedge 5 = 5 \\ p \wedge 2 = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{Fermat}}$

$\begin{cases} 5^{p-1} \equiv 1 [p] \\ 2^{p-1} \equiv 1 [p] \end{cases} \Rightarrow 5^{p-1} - 2^{p-1} \equiv 1 [p]$

b) $m = kd + r$ $0 \leq r < d$ $k \in \mathbb{N}$

$5^d \equiv 2^d [p] \Rightarrow 5^{kd} \equiv 2^{kd} [p] \Rightarrow \begin{cases} 5^{kd+r} \equiv 2^{kd} \times 5^r [p] \\ \text{ou } 5^{kd+r} \equiv 2^{kd+r} [p] \end{cases}$

$\Rightarrow 5^r \times 2^{kd} \equiv 2^{kd+r} [p]$

$\Rightarrow \begin{cases} p / 5^r \times 2^{kd} - 2^{kd+r} = 2^{kd} (5^r - 2^r) \Rightarrow 5^r - 2^r \equiv 0 [p] \\ p \wedge 2^{kd} = 1 \end{cases}$

c) $p / 5^r - 2^r \Rightarrow r=0$

(car si $r \neq 0$ impossible d'après partie A 2°) $p \wedge 5^r - 2^r$)

donc d/m

$5^d - 2^d \equiv 0 [p] \Rightarrow d/q$

$5^{p-1} - 2^{p-1} \equiv 0 [p] \Rightarrow d/p-1$

d) $\begin{cases} d/q \\ d/p-1 \end{cases} \Rightarrow d/q \wedge p-1 \Rightarrow d=1$

$(p-1) \wedge q = 1$ ($p-1 < q$)

3°) si $p=3$ alors $q=13$

si $p \neq 3 \Rightarrow p > 5 \Rightarrow 5^9 - 2^9 \equiv 0 [p]$ le plus petit m qui vérifie la relation est 1 $\Rightarrow 5 - 2 \equiv 0 [p] \Rightarrow p/3$ impossible

donc $S = \{(3; 13)\}$

Exercice : ①
① soit (E) : $y'' + y = 0$

l'éq. caractéristique associée à (E) est $r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r = \pm i$
donc $r_1 = i$ ou $r_2 = -i$ ($p=0, q=1, r=p+iq$)

donc $y(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
est solution général de (E).
 $\rightarrow (e^{px} (\alpha \cos qx + \beta \sin qx)) \Delta$

② soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(\frac{\pi}{2} - x) = 0$

a) on a $g(x) = \cos(x)$ donc $g'(x) = -\sin x$ et $g(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$
d'où $g'(x) + g(\frac{\pi}{2} - x) = -\sin x + \sin x = 0$
donc g est un élément de E solution de $f'(x) + f(\frac{\pi}{2} - x) = 0$

b) on a $f'(x) + f(\frac{\pi}{2} - x) = 0$
donc $f''(x) + (\frac{\pi}{2} - x)' f'(\frac{\pi}{2} - x) = 0$
 $\Rightarrow f''(x) - f'(\frac{\pi}{2} - x) = 0$
 $\Rightarrow f''(x) = f'(\frac{\pi}{2} - x)$

c) si f est solution de l'équation $f'(x) + f(\frac{\pi}{2} - x) = 0$
 $\Rightarrow f'(x) = -f(\frac{\pi}{2} - x)$
 $\Rightarrow f'(\frac{\pi}{2} - x) = -f(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - x)) = -f(x)$

et on a $f''(x) = f'(\frac{\pi}{2} - x) = -f(x)$

donc $f''(x) + f(x) = 0$

donc f est solution de l'équation de (E) : $y'' + y = 0$

d) si $f \in E$ alors f vérifie l'équation (E) : $y'' + y = 0$
d'après a) on a $f(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

donc $f'(x) = -\alpha \sin x + \beta \cos x$

$f'(\frac{\pi}{2} - x) = -\alpha \cos x + \beta \sin x$

et comme $f(x) + f'(\frac{\pi}{2} - x) = 0 \Rightarrow 2\beta \sin x = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow f(x) = \alpha \cos x$
 $(x \in \mathbb{R}) \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 2

① ⓐ Δ Astuce : il suffit de montrer que $(E, +)$ est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}), +)$. (car $E \subset M_2(\mathbb{R}) \rightarrow$ gpe connu)

on a $E \subset M_2(\mathbb{R})$

de plus $E \neq \emptyset$ car $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un élément de E .

soient $M, N \in E$ donc $\exists a, b, x, y$ de $\mathbb{R}$ tq :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x+2y \end{pmatrix}$$

$$M - N = \begin{pmatrix} a-x & b-y \\ -2b+2y & a+2b-x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-x & b-y \\ -2(b-y) & a-x+2(b-y) \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } M - N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -2\beta & \alpha+2\beta \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha = a-x, \beta = b-y \text{ et } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

d'où $M - N \in E$.

donc $(E, +)$ est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}), +)$

de plus $(M_2(\mathbb{R}), +)$ est un gpe commutatif

donc $(E, +)$ est un gpe commutatif.

② Méthode ①

on a $(E, +)$ est un sous-gpe de $(M_2(\mathbb{R}), +)$

Montrons que E est partie stable de $(M_2(\mathbb{R}), \cdot)$

soit $M \in E$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha M = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ -2\alpha b & \alpha a + 2\alpha b \end{pmatrix} \in E$$

car $(\alpha a, \alpha b) \in \mathbb{R}^2$.

donc E est stable dans $(M_2(\mathbb{R}), \cdot)$

donc $(E, +, \cdot)$ sous espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

et comme $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel

donc $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Méthode 2 : comme $E \subset M_2(\mathbb{R})$, et $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel connu, donc il suffit de montrer que $(E, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

aid :
$$\begin{cases} E \neq \emptyset \\ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall M, N \in E, \alpha \cdot M + \beta \cdot N \in E \end{cases}$$

Déterminons $\dim E$.

soit $M \in E \Rightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, M = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$$= aI + bJ \text{ avec } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

donc (I, J) est une famille génératrice de $(E, +, \cdot)$

de plus soient a, b de $\mathbb{R}$ tel que $aI + bJ = O_2$

$$\Rightarrow M = O_2 \Rightarrow a = 0 \text{ et } b = 0$$

$\Rightarrow (I, J)$ est libre.

d'où la famille (I, J) est une base de $(E, +, \cdot)$

donc $\dim E = 2$.

② or $J^2 = J \times J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = -2I + 2J$

$$M(a, b) \times M(c, d) = (aI + bJ)(cI + dJ).$$

$$= acI + adJ + bcJ + bdJ^2$$

$$= acI + adJ + bcJ + bd(-2I + 2J)$$

$$= (ac - 2bd)I + (ad + bc + 2bd)J$$

③ Soient $M(a, b)$ et $M(c, d)$ des éléments de E .

$$\text{on a } f(M(a, b) \times M(c, d)) = f(M(ac - 2bd, ad + bc + 2bd)) \\ = (ac + ad + bc) + (ad + bc + 2bd)i$$

d'autre part $f(M(a, b)) \times f(M(c, d)) = (a + b + ib)(c + d + id)$

$$= ac + ad + bc + bd + (a + b)di + (c + d)bi - bd \\ = ac + ad + bc + (ad + bc + 2bd)i \\ = f(M(a, b) \times M(c, d)) \quad \subsetneq \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}.$$

donc f est homomorphisme de (E, x) vers $(\mathbb{C}, x)$.
 Montrons que f est bijective.

soit $z \in \mathbb{C}$, donc $\exists! (n, y) \in \mathbb{R}^2$ tq $z = n + iy$

on pose $f(M(a, b)) = z$

$$\Leftrightarrow a + b + ib = n + iy$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = n \\ b = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = n - b = n - y \\ b = y \end{cases}$$

donc $\forall z \in \mathbb{C} \exists! M(a, b) \in E$ tq $f(M(a, b)) = z$
 d'où f est bijective de E vers $\mathbb{C}$.



$$f^{-1}: \mathbb{C} \longrightarrow E$$

$$z \longmapsto M(n-y, y) \text{ avec } z = n + iy,$$

© on a f est isomorphisme de (E, x) vers $(\mathbb{C}, x)$

$$\text{donc } f(E) = \mathbb{C} \text{ de plus } f(a_2) = 0$$

$$\text{d'où } f(E^*) = \mathbb{C}^* \text{ donc } f^{-1}(\mathbb{C}^*) = E^*$$

et comme $(\mathbb{C}^*, x)$ groupe commutatif

alors (E^*, x) groupe commutatif

et d'après la question (2) E est stable dans $(M_2(\mathbb{R}), x)$

et la loi x est distributive par rapport à $+$ dans $M_2(\mathbb{R})$

donc x est distributive par rapport à $+$ dans E .

d'où $(E, +, x)$ est un corps commutatif.

$$\textcircled{d} \quad M^3 - I + J \Leftrightarrow M^3 = I - J \Leftrightarrow f(M^3) = f(I - J) \Leftrightarrow (f(M))^3 = -i$$

$$\Leftrightarrow (a + b + ib)^3 = -i \Leftrightarrow (a + b + ib)^3 - i^3 = 0$$

on pose $z = n + iy$ avec $(n, y) \in \mathbb{R}^2$ et $z^3 = -i \Leftrightarrow z^3 - i^3 = 0$

$$\Leftrightarrow (z - i)(z + iz - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = i \text{ ou } z + iz - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = i \text{ ou } z = \frac{-i - \sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \text{ ou } z = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

$$\text{on a } z = a + b + ib = x + iy \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a + b = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a + b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{c/c } S = \left\{ M(1, 1), M\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, -\frac{1}{2}\right), M\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \right\}.$$

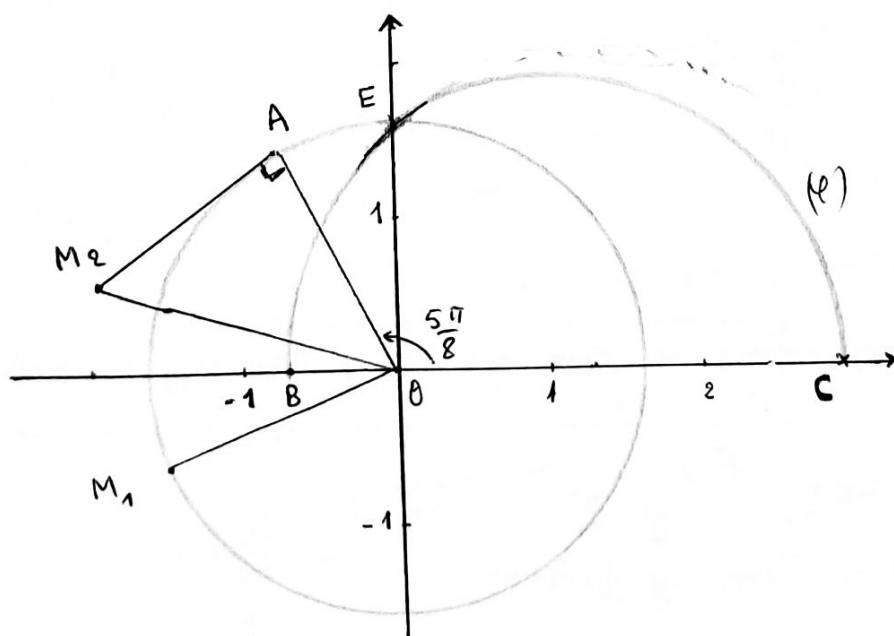
Exercice 3

① a) (E): $z^2 - (1+2i)mz - (1-i)m^2 = 0$, $m \in \mathbb{C}^*$, $\arg(m) \in]0, \pi[$
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-(1+2i))^2 - 4(-(1-i)m^2) = m^2$
 on a bien $\Delta \neq 0$ (car $m \in \mathbb{C}^*$), donc (E) admet deux solutions
 $z_1 = \frac{(1+2i)m - m}{2} = im$ et $z_2 = \frac{(1+2i)m + m}{2} = m(1+i)$.

② $z_1 z_2 > 0 \Leftrightarrow \arg(z_1 z_2) \equiv 0 [2\pi]$ et $\theta \in]0, \pi[$
 $\Leftrightarrow \arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv 0 [2\pi]$ et $\theta \in]0, \pi[$
 $\Leftrightarrow (\theta + \frac{\pi}{2}) + (\theta + \frac{\pi}{4}) \equiv 0 [2\pi]$ et $\theta \in]0, \pi[$
 $\Leftrightarrow 2\theta \equiv -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$ et $\theta \in]0, \pi[$
 $\Leftrightarrow \theta \equiv -\frac{3\pi}{8} [\pi]$ et $\theta \in]0, \pi[$
 $\Leftrightarrow \theta = -\frac{3\pi}{8} + k\pi$ et $\theta \in]0, \pi[$
 $\Leftrightarrow \theta = \frac{5\pi}{8} \quad (k=1)$

③ $z_1 z_2 = im \cdot m(1+i) = m^2 i \cdot (1+i)$
 et comme $m = |m| \cdot e^{i\theta} = |m| e^{i\frac{5\pi}{8}}$ alors $m^2 = |m|^2 \cdot e^{i\frac{5\pi}{4}}$
 et $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $1+i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$

donc $z_1 z_2 = |m|^2 \cdot e^{i\frac{5\pi}{4}} \times e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = |m|^2 \cdot \sqrt{2} e^{i2\pi}$
 d'où $z_1 z_2 = |m|^2 \cdot \sqrt{2}$.



- ⑥ Le point $E \in (c)$ de diamètre $[BC]$, donc le triangle BEC est rectangle en E , et les triangles OCE et OEB sont rectangles en O .

$$\text{on a } \tan(\widehat{OEC}) = \frac{OC}{OE}$$

$$\text{et comme } \widehat{BEO} + \widehat{OEC} = \frac{\pi}{2} \quad (2a) \quad \text{alors } \tan(\widehat{BEO}) = \frac{1}{\tan(\widehat{OEC})}$$

$$\text{donc } \tan(\widehat{BEO}) = \frac{OE}{OC} \quad \text{et on a } \tan(\widehat{BEO}) = \frac{OB}{OE}$$

$$\text{d'où } \frac{OE}{OC} = \frac{OB}{OE} \Leftrightarrow OE^2 = OB \cdot OC.$$

⑦ Dérivation : on a $m = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt[4]{2}} \cdot e^{i\frac{5\pi}{8}}$ donc $|m| = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt[4]{2}}$

d'autre part $OE^2 = OB \cdot OC = |t| \cdot \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} \right| = t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $OE = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt[4]{2}}$
il en résulte que $|m| = OE$

④ a) Voir figure précédente.

b) on a $z_2 = m(1+i) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot m$, il en résulte que M_2 est l'image de A par le composé d'une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et d'une homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{2}$.

de plus $z_1 = im = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot m$, il en résulte que M_1 est l'image de A par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Problème.

Partie ①

① a) soit $x > 0$, on a bien $x < 2x$ et la fonction f est continue sur $[x, 2x]$, est dérivable sur $]x, 2x[$, donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]x, 2x[$ tel que :

$$f(2x) - f(x) = x \cdot f'(c_x) = x (\bar{e}^{c_x} - c_x e^{c_x} - \bar{e}^{-c_x}) = -x \cdot c_x \cdot \bar{e}^{-c_x}$$

Donc pour tout $x > 0$, il existe $c_x \in]x, 2x[$ tq $f(2x) - f(x) = -x c_x \bar{e}^{-c_x}$

② soit $x > 0$, d'après ce qui précède $f(2x) - f(x) = -x c_x \bar{e}^{-c_x}$
avec $c_x > x > 0$, donc $-x c_x \bar{e}^{-c_x} < 0$ (comme $\bar{e}^{-c_x} > 0$)
d'où $f(2x) - f(x) < 0$

② on sait que $\forall n > 0, \exists c_n > n$ tq $f(2n) - f(n) = -x c_n e^{-c_n}$
 on a bien si $n \rightarrow +\infty$ alors $c_n \rightarrow +\infty$
 de plus $\forall n > 0 \quad 0 < x \cdot c_n e^{-c_n} < c_n^2 \cdot e^{-c_n}$
 et on sait $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 \cdot e^t = 0$ donc $\lim_{c_n \rightarrow +\infty} c_n^2 \cdot e^{-c_n} = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x \cdot c_n e^{-c_n} = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(2n) - f(n) = 0$

Partie ②

① a) soit $x \in [0, 1]$, on a $1 - x^2 \leq 1$

$$\Rightarrow (1-x)(1+x) \leq 1$$

$$\Rightarrow 1-x \leq \frac{1}{1+x} \quad \text{car } 1+x > 0$$

d'autre part pour tout $x \in [0, 1]$

$$\text{on a } 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{1+x} = \frac{2(1+x) - (1+x)x - 2}{2(1+x)} = \frac{x(1-x)}{2(1+x)}$$

on a $x \in [0, 1]$ donc $x > 0$ et $2(1+x) > 0$ et $1-x > 0$

$$\text{donc } \frac{x(1-x)}{2(1+x)} \geq 0 \quad \text{d'où } 1 - \frac{x}{2} \geq \frac{1}{1+x}$$

on conclut que $\forall x \in [0, 1] \quad 1-x \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 - \frac{x}{2}$.

⑥ soit $t \in [0, +\infty[$

si $t = 0$, les inégalités sont vérifiées.

si $t > 0$. Pour pouvoir appliquer la question précédente, il suffit de montrer que $0 \leq t e^t \leq 1$, c'est-à-dire $0 \leq t \leq e^t$

posons donc $g(t) = e^t - t$, $t \in [0, +\infty[$

on a bien g est dérivable sur $[0, +\infty[$, donc $g'(t) = e^t - 1$

comme $t \geq 0 \Rightarrow e^t \geq 1 \Rightarrow e^t - 1 \geq 0 \Rightarrow g$ est stricte. croissante

sur $[0, +\infty[$ et pour $t \geq 0$ on a $g(t) \geq g(0)$

$$\Rightarrow t \geq 0 \quad e^t - t \geq 1$$

$$\Rightarrow t \geq 0 \quad e^t \geq t+1 \geq t$$

on conclut que $\forall t \geq 0 \quad e^t \geq t$ d'où $0 \leq t e^t \leq 1$

$$\text{d'où } 1 - t e^{-t} \leq \frac{1}{1+t e^{-t}} \leq 1 - \frac{t e^{-t}}{2} \quad \text{pour tout } t \in [0, +\infty[$$

© soit $x \geq 0$, pour $x = 0$ les inégalités sont vérifiées.

si $x > 0$, on a d'après ce qui précède $1 - te^{-t} \leq \frac{1}{1+te^{-t}} \leq 1 - \frac{te^{-t}}{2}$

$$\text{donc } \int_x^{2x} (1 - te^{-t}) dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{1+te^{-t}} dt \leq \int_x^{2x} \left(1 - \frac{te^{-t}}{2}\right) dt \quad (*)$$

et d'après la première partie $\forall x \in [0, +\infty[\quad f'(x) = -xe^{-x}$

$$\text{donc } \int_x^{2x} -te^{-t} dt = [f(t)]_x^{2x} = f(2x) - f(x)$$

$$\text{d'où } \int_x^{2x} (1 - te^{-t}) dt = [t]_x^{2x} + f(2x) - f(x) = x + f(2x) - f(x)$$

$$\text{et } \int_x^{2x} \left(1 - \frac{te^{-t}}{2}\right) dt = x + \frac{1}{2} (f(2x) - f(x))$$

on remplace dans l'inégalité (*) on trouve

$$\forall x \geq 0 \quad x + f(2x) - f(x) \leq F(x) \leq x + \frac{1}{2} (f(2x) - f(x))$$

d) on a $\forall x \geq 0 \quad F(x) \geq x + f(2x) - f(x)$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty \quad \text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(2x) - f(x)) = 0$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty \quad (\text{par la comparaison des limites}).$$

$$\text{de plus } \forall x \geq 0 \quad x + f(2x) - f(x) \leq F(x) \leq x + \frac{1}{2} (f(2x) - f(x))$$

$$\text{donc } \forall x \geq 0 \quad f(2x) - f(x) \leq F(x) - x \leq \frac{1}{2} (f(2x) - f(x))$$

$$\text{et comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(2x) - f(x)) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (f(2x) - f(x)) = 0$$

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - x) = 0$$

et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$, donc (D): $y = x$ est une asymptote oblique à (C_F) .

$$\text{e) soit } x \geq 0 \quad \text{on a } F(x) - x \leq \frac{f(2x) - f(x)}{2} \leq 0 \quad (\text{d'après partie 1})$$

l'interprétation de cette inégalité est que la courbe (C_F) est située au dessous de la droite (D) sur $[0, +\infty[$.

② d'après ce qui précède on a $\forall n > 0 \quad x + f(2n) - f(n) \leq F(n) \leq x + \frac{1}{2}(f(2n) - f(n))$
 donc $\forall n > 0 \quad 1 + \frac{f(2n) - f(n)}{x} \leq \frac{F(n) - F(0)}{x - 0} \leq 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{f(2n) - f(n)}{x}$

et d'après la partie ① $\forall n > 0 \quad \exists c_n \in]n, 2n[\quad f(2n) - f(n) = -x c_n \cdot e^{-c_n}$
 donc $\forall n > 0 \quad \exists c_n \in]n, 2n[\quad \frac{f(2n) - f(n)}{x} = -c_n \cdot e^{-c_n}$

de plus si $x \rightarrow 0^+$ on a $c_n \rightarrow 0^+$ car $c_n \in]n, 2n[$
 et $\lim_{0^+} -c_n \cdot e^{-c_n} = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{f(2n) - f(n)}{x} = 0$

on en déduit $\lim_{0^+} \frac{F(n) - F(0)}{x - 0} = 1$ (d'après le théorème des gendarmes)

d'où F est dérivable à droite en zéro et $F'_d(0) = 1$

③ ① soit $n > 0$, comme $g \mapsto \frac{1}{1+te^{-t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$

donc g admet une primitive sur $]0, +\infty[$ que l'on pose $G(n) = \int_1^n g(t) dt$
 donc $F(n) = \int_x^{2n} g(t) dt = \int_x^1 g(t) dt + \int_1^{2n} g(t) dt$

d'où $F(n) = G(2n) - G(x)$

on a bien G est dérivable sur $]0, +\infty[$

de plus $n \mapsto 2n$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$\forall n > 0 \quad 2n \in]0, +\infty[$

donc $n \mapsto G(2n)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

q/c F est dérivable sur $]0, +\infty[$

de plus $F'_d(0) = 1$ donc F est dérivable sur $[0, +\infty[$
 et on a $\forall n > 0$

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) \\ &= \frac{e^{2x} + 2x(e^x - 1)}{(e^{2x} + 2xe^x)(1 + xe^x)} \end{aligned}$$

⑥ on a $n > 0$ donc $e^n - 1 > 0$ de plus $(e^{2n} + 2ne^n)(1 + ne^{-n}) > 0$
 donc $F'(n) > 0$ pour tout $n > 0$
 donc F est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$F(x)$	0	$+\infty$

⑦ on a $S = \int_0^1 |F(u) - u| du$ (Unité de mesure)

et comme $\forall n > 0 \quad F(n) - n < 0$ donc $S = \int_0^1 (u - F(u)) du$

et on a d'après partie ② $\forall n > 0 \quad u + \frac{1}{2}(f(2n) - f(u)) \leq F(u) \leq u + \frac{1}{2}(f(2n) - f(u))$
 donc $-\frac{1}{2}(f(2n) - f(u)) \leq u - F(u) \leq -\frac{1}{2}(f(2n) - f(u))$

d'où $0 \leq -\frac{1}{2} \int_0^1 (f(2n) - f(u)) du \leq S \leq -\int_0^1 (f(2n) - f(u)) du$

Calculons $-\int_0^1 (f(2n) - f(u)) du = \int_0^1 f(u) du - \int_0^1 f(2n) du$

$$\text{on a } \int_0^1 f(u) du = \int_0^1 (u+1)e^{-u} du = \left[-(u+1)e^{-u} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-u} du$$

$$= \left[-(u+1)e^{-u} \right]_0^1 + \left[-e^{-u} \right]_0^1 = 2 - 3e^{-1}$$

$$\text{et } \int_0^1 f(2n) du = \int_0^1 (2n+1)e^{-2n} du = \left[-\frac{(2n+1)e^{-2n}}{2} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-2n} du$$

$$= \left[-\frac{(2n+1)e^{-2n}}{2} \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{2} e^{-2n} \right]_0^1 = 1 - 2e^{-2}$$

$$\text{et } 2 - 3e^{-1} + (1 - 2e^{-2}) = 1 - 3e^{-1} + 2e^{-2} \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{donc } 0 \leq S \leq \frac{1}{4}$$

Partie (3)

(1) a la fonction F est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc F est une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$ et comme $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad e^{-n} \in [0, +\infty[$, donc il existe un unique antécédant α_n de e^{-n} par la fonction F , c-à-d $\exists ! \alpha_n \in [0, +\infty[$ tel que $F(\alpha_n) = e^{-n}$
 d'où $\exists ! \alpha_n \in [0, +\infty[\quad \int_{\alpha_n}^{2\alpha_n} \frac{1}{1+te^{-t}} dt = e^{-n}$

(b) on a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n+1 \geq n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad -(n+1) \leq -n$
 et comme $x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $e^{-(n+1)} \leq e^{-n}$
 donc $F(\alpha_{n+1}) \leq F(\alpha_n)$
 d'où $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ (car F est croissante sur $[0, +\infty[$)
 donc (α_n) est décroissante.

Deduction: on a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \alpha_n \in [0, +\infty[$
 car $\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_n \geq 0$
 donc (α_n) est minorée par 0

et comme (α_n) est décroissante, elle est donc convergente.

(c) Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$ par absurde (Méthode 2)

posons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = l$

on a bien $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \alpha_n \geq 0$ donc $l \geq 0$

supposons que $l > 0$

on a l'égalité $\int_{\alpha_n}^{2\alpha_n} \frac{1}{1+te^{-t}} dt = e^{-n}$

par passage à la limite on trouve $\int_l^{2l} \frac{1}{1+te^{-t}} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$

de plus le segment $[l, 2l]$ est non vide (car $l > 0$)

donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+te^{-t}}$ est nulle sur $[l, 2l]$

en particulier $\frac{1}{1+le^{-l}} = 0$

$\Leftrightarrow 1 = 0$ contradiction, d'où $l = 0$

car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$

A.retenir : si $\forall x \in [a, b)$ $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$
 (f est continue sur $[a, b)$)

Méthode ②.

on a $g: t \mapsto \frac{1}{1+te^{-t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc admet

une fonction primitive G qui est strictement croissante ($G' = g > 0$)
 donc G est injective.

de plus $\int_{\alpha_n}^{2\alpha_n} g(t) dt = e^n \Rightarrow \int_l^{2l} g(t) dt = 0$

$$\Rightarrow G(2l) - G(l) = 0 \Rightarrow G(2l) = G(l)$$

$$\Rightarrow 2l = l \Rightarrow l = 0$$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$.

② (a) soit $n \geq 1$
 la fonction F est continue sur $[0, \alpha_n]$ (car F est dérivable)
 donc d'après la formule de la moyenne $\exists \beta_n \in [0, \alpha_n]$
 tel que $F(\beta_n) = \frac{1}{\alpha_n - 0} \int_0^{\alpha_n} F(t) dt = \frac{U_n}{\alpha_n}$

donc $\exists \beta_n \in [0, \alpha_n]$ $U_n = \alpha_n \cdot F(\beta_n)$

③ soit $n \geq 1$

$$U_{n+1} - U_n = \int_0^{\alpha_{n+1}} F(t) dt - \int_0^{\alpha_n} F(t) dt = \int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} F(t) dt = - \int_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_n} F(t) dt$$

et comme $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et la fonction F est positive

donc $\int_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_n} F(t) dt \geq 0 \Rightarrow - \int_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_n} F(t) dt \leq 0 \Rightarrow U_{n+1} - U_n \leq 0$

donc (U_n) est décroissante

Déduction : on a $U_n = \int_0^{\alpha_n} F(t) dt = \alpha_n \cdot F(\beta_n)$

donc $\forall n \geq 1$ $U_n \geq 0$, donc (U_n) est minorée par 0, d'où (U_n) converge

posons $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$
 on a $\forall n \geq 1$, $W_n = \int_0^{x_n} F(t) dt$
 par passage à la limite on trouve $l = \int_0^d F(t) dt = 0$ (car $d=0$)
 donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0$.

③ soit $n \geq 1$, la fonction F est continue sur $[W_n + \frac{1}{n}, W_n + \frac{2}{n}]$ et dérivable sur $]W_n + \frac{1}{n}, W_n + \frac{2}{n}[$
 donc d'après le théorème des accroissements finis (T.A.F) il existe $\lambda_n \in]W_n + \frac{1}{n}, W_n + \frac{2}{n}[$ tq

$$\frac{F(W_n + \frac{2}{n}) - F(W_n + \frac{1}{n})}{(W_n + \frac{2}{n}) - (W_n + \frac{1}{n})} = F'(\lambda_n)$$

$$\Rightarrow n \left(F(W_n + \frac{2}{n}) - F(W_n + \frac{1}{n}) \right) = \frac{e^{2\lambda_n} + 2\lambda_n(e^{\lambda_n} - 1)}{(e^{2\lambda_n} + 2\lambda_n)(1 + \lambda_n e^{-\lambda_n})} \quad (\text{cf. f.})$$

⑥ on a $\forall n \geq 1$, $W_n + \frac{1}{n} \leq \lambda_n \leq W_n + \frac{2}{n}$
 et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (W_n + \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (W_n + \frac{2}{n}) = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = 0$ (théorème des gendarmes)

de plus la fonction $x \mapsto \frac{e^{2x} + 2x(e^x - 1)}{(e^{2x} + 2x)(1 + x e^{-x})}$ est continue sur $[0, +\infty[$ (par opération)

et on a $V_n = \frac{e^{2\lambda_n} + 2\lambda_n(e^{\lambda_n} - 1)}{(e^{2\lambda_n} + 2\lambda_n)(1 + \lambda_n e^{-\lambda_n})}$, $\forall n \geq 1$

par passage à la limite on trouve $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 1$
 (car $\lambda_n = 0$)
 et $\lim_{t \rightarrow 0} t e^t = 0$

Fin

Exercice 1

- ① f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme somme de deux dérivables sur $\mathbb{R}$)
donc f_n est dérivable sur $[0,1]$ et on a
 $\forall x \in [0,1] \quad f'_n(x) = -e^{-x} - (2n+1) \cdot x^{2n}$
on a pour tout $x \in [0,1] \quad e^{-x} > 0$ et $(2n+1)x^{2n} \geq 0$

donc $\forall x \in [0,1] \quad f'_n(x) < 0$
d'où f_n est strictement décroissante sur $[0,1]$

x	0	1
$f_n(x)$	1	$e^{-1} - 1$

$$f_n(0) = 1$$

$$f_n(1) = e^{-1} - 1 = \frac{1-e}{e}$$

- ② f_n est continue sur $[0,1]$ (comme somme de deux fcts continues)
de plus f_n est strictement décroissante sur $[0,1]$
donc elle réalise une bijection de $[0,1]$ vers l'intervalle J
tel que $J = f_n([0,1]) = [e^{-1} - 1, 1]$

et comme $0 \in]e^{-1} - 1, 1[$ alors l'éq. $f_n(x) = 0$ admet
une solution unique $u_n \in]0,1[$.

③ (a) soit $x \in]0,1[$, soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = e^{-x} - x^{2n+3} - (e^{-x} - x^{2n+1})$$

$$= x^{2n+1} - x^{2n+3} = x^{2n+1}(1-x^2)$$

et comme $x \in]0,1[$ alors $1-x^2 > 0$ et $x^{2n+1} > 0$
d'où $x^{2n+1}(1-x^2) > 0$

q.c. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in]0,1[\quad f_{n+1}(x) > f_n(x)$

⑥ on a d'après ce qui précède $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0, 1[\quad f_n(x) < f_{n+1}(x)$
 pour $x = U_{n+1}$, on aura $f_n(U_{n+1}) < f_{n+1}(U_{n+1})$

et comme $f_{n+1}(U_{n+1}) = 0$ alors $f_n(U_{n+1}) < 0$

⑦ on a $f_n(U_{n+1}) < 0 \Rightarrow f_n(U_{n+1}) < f_n(U_n)$ (car $f_n(U_n) = 0$)
 $\Rightarrow U_{n+1} > U_n$ (car f_n est strictement décroissante)
 $\Rightarrow (U_n)$ est croissante.

Déduction : (U_n) est une suite croissante et majorée par 1
 donc elle est convergente.

④ ① on a $f_n(U_n) = 0 \Rightarrow e^{-U_n} - (U_n)^{2n+1} = 0$
 $\Rightarrow e^{-U_n} = U_n^{2n+1}$
 $\Rightarrow -U_n = \ln(U_n^{2n+1}) = (2n+1) \cdot \ln(U_n)$
 $\Rightarrow \ln(U_n) = -\frac{U_n}{2n+1}$

② posons $l = \lim U_n$ ($l > 0$)
 et comme $\ln(U_n) = -\frac{U_n}{2n+1}$ et la fonction $\ln$ est continue
 sur $]0, +\infty[$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(U_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{U_n}{2n+1}\right)$
 $\Rightarrow \ln(l) = 0$
 $\Rightarrow l = 1$

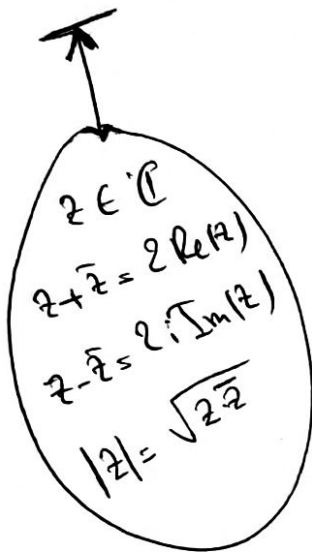
Exercice 2

Soit (E) : $z^2 - (1 + m(2+i)) \cdot z + 2m(1+im) = 0$

① ① $\Delta = (1 + m(2+i))^2 - 4(2m(1+im))$
 $= 1 + m^2(2+i)^2 + 2m(2+i) - 8m(1+im)$
 $= 1 + m^2(3+4i) + 4m + 2mi - 8m - 8im^2$
 $= 1 + 2mi - 4m + m^2(3-4i)$
 $= 1 + 2m(i-2) + m^2(i-2)^2 = (1 + m(i-2))^2$ QED

⑥ comme $\Delta = (1 + m(-2+i))^2 = d^2$ avec $d = 1 + m(-2+i)$
 donc $z_1 = \frac{-b+d}{2a} = \frac{1+m(2+i) + 1+m(-2+i)}{2} = 1+im$
 et $z_2 = \frac{-b-d}{2a} = \frac{1+m(2+i) - 1 - m(-2+i)}{2} = 2m$.

② ① $u \in \mathbb{R} \iff \frac{2m}{1+im} \in \mathbb{R} \iff \frac{2m}{1+im} = \frac{2m}{1+im}$
 $\iff \frac{2\bar{m}}{1-i\bar{m}} = \frac{2m}{1+im}$



$\iff 2\bar{m}(1+im) = 2m(1-i\bar{m})$
 $\iff 2\bar{m} + 2im\bar{m} = 2m - 2im\bar{m}$
 $\iff 2m - 2\bar{m} = 4im\bar{m} = 4i|m|^2$
 $\iff m - \bar{m} = 2i|m|^2$
 $\iff 2i\text{Im}(m) = 2i|m|^2$
 $\iff |m|^2 = \text{Im}(m)$

⑥ $u \in \mathbb{R} \iff |m|^2 = \text{Im}(m)$
 on pose $m = x+iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
 donc $|m|^2 = x^2+y^2$ et on a $\text{Im}(m) = y$

d'où $|m|^2 = \text{Im}(m) \iff x^2+y^2 = y \iff x^2+y^2-y = 0$
 $\iff x^2+y^2-y+\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
 $\iff (x-0)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2$

d'où l'ensemble des points $M(m)$ pour que $u \in \mathbb{R}$ est le cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(0, \frac{1}{2})$ et de rayon $R = \frac{1}{2}$ dépourvu du point $I(0,1)$.

③ ① $A(-i)$ et $M(m)$ et O sont alignés $\iff \frac{m-0}{-i-0} \in \mathbb{R} \iff \frac{x+iy}{-i} \in \mathbb{R}$
 $\iff xi - y \in \mathbb{R} \iff x = 0$
 $\iff m \in i\mathbb{R} \quad (m = x+iy \mid x,y \in \mathbb{R})$

$$b) \frac{u+i}{u} = \frac{\frac{2m}{1+i} + i}{\frac{2m}{1+i}} = \frac{2m+i(1+i)}{2m} = \frac{m+i}{2m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m+i}{m}$$

c) on a $m \notin i\mathbb{R} \Rightarrow m \neq i$ et $m \neq -i$
 et comme $\frac{u+i}{u} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m+i}{m}$ alors $\frac{u+i}{u} \times \frac{m}{m+i} = \frac{1}{2} (m \neq -i)$
 donc $\frac{u+i}{u} \times \frac{m}{m+i} \in \mathbb{R}$ i.e. $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_0} \times \frac{z_M - z_0}{z_M - z_A} \in \mathbb{R}$

d'où les points A, M, 0 et B sont cocycliques.

Exercice 3

① a) Méthode 1: Algorithme d'Eucclide

$$\text{on a } 2013 = 1 \times 1962 + 51$$

$$1962 = 38 \times 51 + 24$$

$$51 = 2 \times 24 + 3$$

$$24 = 8 \times 3 + 0$$

$$\text{donc } 2013 \wedge 1962 = 3$$

Méthode 2: Décomposition en facteurs premiers.

Deduction.

$$\text{on a (E)} 2013x - 1962y = 54$$

$$\text{et comme 3 divise 54 (car } 54 = 3 \times 18)$$

donc (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

b) on a $(78, 80)$ est solution particulière de (E) donc $2013(78) - 1962(80) = 54$

$$\Rightarrow 671(78) - 654(80) = 18$$

$$\text{et comme (E)} 2013x - 1962y = 54 \Rightarrow 671x - 654y = 18$$

$$\Rightarrow 671x - 654y = 671(78) - 654(80)$$

$$\Rightarrow 671(x - 78) = 654(y - 80)$$

$$\Rightarrow 654 \mid 671(x - 78)$$

et comme $654 \wedge 671 = 1$ donc d'après Gauss $654 \mid x - 78$

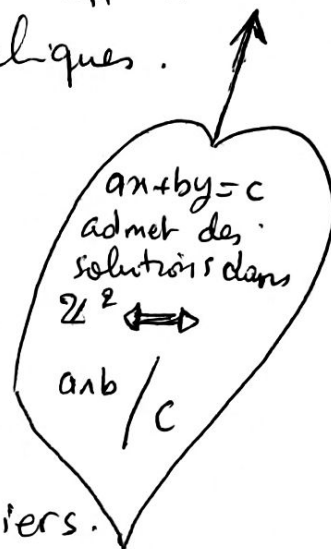
$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } x - 78 = 654k$$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } x = 78 + 654k$$

on remplace x par $78 + 654k$ dans $671(x - 78) = 654(y - 80)$

$$\text{on trouve } 671(654k) = 654(y - 80)$$

$$\Rightarrow y - 80 = 671k \Rightarrow y = 80 + 671k, k \in \mathbb{Z}$$



donc si (n, y) est solution (E) $\Rightarrow x = 78 + 654k$ et $y = 80 + 671k, k \in \mathbb{Z}$
 Réciproquement tous les couples $(654k + 78, 671k + 80)$ de $\mathbb{Z}^2$
 sont solutions de (E) car :

$$\begin{aligned} & 2013(78 + 654k) - 1962(80 + 671k) \\ &= 1316502k + 157014 - 1316502k - 159660 \\ &= 157014 - 159660 = 54. \end{aligned}$$

conclusion $S = \{ (78 + 654k, 80 + 671k) \mid k \in \mathbb{Z} \}$ est l'ensemble
 des solutions de l'éq. (E).

$$\begin{aligned} \textcircled{2} (n, y) \text{ est solution de (E)} &\Rightarrow 2013n - 1962y = 54 \\ &\Rightarrow 671n - 654y = 18 \\ &\Rightarrow 671n = 18 + 654y = 6(3 + 109y) \\ &\Rightarrow 6 \mid 671n \end{aligned}$$

et comme $6 \wedge 671 = 1$ (car $671 = 11 \times 61$ et $6 \wedge 11 = 1$ et $6 \wedge 61 = 1$)
 donc d'après Gauss $6 \mid n$
 $11 \wedge 61 = 1$

$$\Rightarrow n \equiv 0 \pmod{6}.$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \text{ on a (E): } 2013x - 1962y &= 54 \Leftrightarrow 671x - 654y = 18 \\ \text{on pose } d = \text{pgcd}(671, 654) &\Rightarrow d \mid x \text{ et } d \mid y \\ &\Rightarrow d \mid (671x - 654y) \\ &\Rightarrow d \mid 18 \Rightarrow d \in \{ \text{les diviseurs de } 18 \} \\ &\Rightarrow d \in \{ 1, 2, 3, 6, 9, 18 \} \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \text{ on a } \begin{cases} 671a - 654b = 18 \\ a \wedge b = 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2013a - 1962b = 54 \\ a \wedge b = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b) \text{ est solution de (E)} \\ a \wedge b = 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 78 + 654k \\ b = 80 + 671k, k \in \mathbb{Z} \\ a \wedge b = 18 \end{cases}$$

donc on divise b par a en utilisant Algorithme d'Euclide

$$\begin{aligned}
 \text{on a } 671k + 80 &= 1 \times (654k + 78) + 17k + 2 \\
 654k + 78 &= 38(17k + 2) + 8k + 2 \\
 17k + 2 &= 2(8k + 2) + k - 2 \\
 8k + 2 &= 8(k - 2) + 18
 \end{aligned}$$

$$\text{donc } a \wedge b = (k - 2) \wedge 18$$

$$\text{d'où le système devrait } \begin{cases} a \wedge b = (k - 2) \wedge 18 \\ a \wedge b = 18 \end{cases}$$

$$\text{donc } (k - 2) \wedge 18 = 18 \text{ car } 18 \text{ divise } k - 2$$

$$\text{donc } \exists \alpha \in \mathbb{Z} \text{ tq } k - 2 = 18\alpha$$

$$\text{car } \exists \alpha \in \mathbb{Z} \text{ tq } k = 2 + 18\alpha.$$

$$\text{on remplace } k \text{ par } 2 + 18\alpha \text{ dans le système } \begin{cases} a = 78 + 654k \\ b = 80 + 671k \\ a \wedge b = 18 \end{cases}$$

$$\text{on trouve } \begin{cases} a = 1386 + 11772\alpha \\ b = 1422 + 12078\alpha \\ a \wedge b = 18 \end{cases}$$

$$\text{donc } S = \{ (1386 + 11772\alpha, 1422 + 12078\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{N} \}$$

(il est facile de vérifier que le couple $(1386 + 11772\alpha, 1422 + 12078\alpha)$ vérifie le système proposé)

Exercice 4 : Partie ①

① soient x et y de $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ on pose $x * y = x + y - 2xy$.

M.q. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{\frac{1}{2}\}$ $x * y \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ c'ad $x * y \neq \frac{1}{2}$.

Utilisons le principe de contraposée.

c'ad $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{\frac{1}{2}\}$ $(x * y = \frac{1}{2}) \Rightarrow (x = \frac{1}{2} \text{ ou } y = \frac{1}{2})$.

soient $x, y \in \mathbb{R}^2 - \{\frac{1}{2}\}$

$$x * y = \frac{1}{2} \Rightarrow x + y - 2xy = \frac{1}{2} \Rightarrow x - \frac{1}{2} + y(1 - 2x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(2x - 1) - y(2x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (2x - 1)(\frac{1}{2} - y) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ou } y = \frac{1}{2}$$

d'où $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{\frac{1}{2}\}$ $x * y \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

d'où $*$ est une loi de composition interne dans $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$.

② soient x, y de $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

$$x * y = x + y - 2xy = y + x - 2yx = y * x$$

donc $*$ est commutative dans $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

soient x, y, z de $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

$$\begin{aligned} \text{ona } (x * y) * z &= (x + y - 2xy) * z \\ &= (x + y - 2xy) + z - 2(x + y - 2xy)z \\ &= x + y + z - 2xy - 2xz - 2yz + 4xyz. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{de plus } x * (y * z) &= x * (y + z - 2yz) \\ &= x + y + z - 2yz - 2x(y + z - 2yz) \\ &= x + y + z - 2xy - 2xz - 2yz + 4xyz \end{aligned}$$

$$\text{donc } \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{\frac{1}{2}\} \quad x * (y * z) = (x * y) * z$$

d'où $*$ est associative dans $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$.

③ on a $*$ est commutative et associative dans $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

Déterminons l'élément neutre dans $(\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}, *)$.

Méthode 1: La remarque

Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ $x * 0 = x + 0 - 2x \cdot 0 = x$
et comme $*$ est commutative donc l'élément neutre cherché est 0

Méthode 2: Résolution de l'équation $x * e = x$,

$$\text{soit } x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\} \quad \text{tp } x * e = x \Leftrightarrow x + e - 2xe = x \Leftrightarrow e(1 - 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow e = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

et comme $x \neq \frac{1}{2}$ alors $x * e = x \Leftrightarrow e = 0$

donc 0 est l'élément neutre dans $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

Déterminons l'élément symétrique x' de x dans $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

soit $x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ on pose $x * x' = e \Leftrightarrow x + x' - 2xx' = 0$

$$\Leftrightarrow x'(1 - 2x) = -x$$

$$\Leftrightarrow x' = \frac{x}{2x-1} \quad (x \neq \frac{1}{2})$$

de plus $x' \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ car si $x' = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2x-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 = -1$ contradiction

d'où tout élément x de $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ admet un symétrique $x' = \frac{x}{2x-1}$ dans $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

on déduit de ce qui précède que $(\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}, *)$ est un gpe abélien.

④ On utilise le principe de récurrence

soit $x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

pour $n=2$ $x * x = x + x - 2x = 2x - 2x^2$

et $\frac{1}{2} (1 - (1 - 2x)^2) = \frac{1}{2} (1 - 1 + 4x - 4x^2) = 2x - 2x^2$

donc l'égalité est vraie pour $n=2$

soit $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ et soit $x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

on suppose que $\underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ fois}} = \frac{1}{2} [1 - (1 - 2x)^n]$

et on montre que $\underbrace{x * x * \dots * x}_{n+1 \text{ fois}} = \frac{1}{2} [1 - (1 - 2x)^{n+1}]$.

$$\underbrace{x * x * \dots * x}_{n+1 \text{ fois}} = \frac{1}{2} [(1 - (1 - 2x)^n) * x]$$

$$= \frac{1}{2} [1 - (1 - 2x)^n] + x - (1 - (1 - 2x)^n) \cdot x$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (1 - 2x)^n + x - x + x (1 - 2x)^n$$

$$= \frac{1}{2} + (1 - 2x)^n (x - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1 - 2x)^n (2x - 1)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (1 - 2x)^{n+1} = \frac{1}{2} [1 - (1 - 2x)^{n+1}]$$

donc $\forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* - \{0, 1\}$

$$x * x * \dots * x = \frac{1}{2} [1 - (1 - 2x)^n]$$

Partie ②

soient $A(x)$ et $A(y)$ des éléments de E avec $x, y \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

$$\begin{aligned} A(x) \times A(y) &= \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-y & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1-y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1-x)(1-y) + xy & 0 & (1-x)y + x(1-y) \\ 0 & 1 & 0 \\ x(1-y) + (1-x)y & 0 & xy + (1-x)(1-y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - (x+y - 2xy) & 0 & x+y - 2xy \\ 0 & 1 & 0 \\ x+y - 2xy & 0 & 1 - (x+y - 2xy) \end{pmatrix} \\ &= A(x+y) \end{aligned}$$

et on a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{\frac{1}{2}\} : x * y \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

donc $A(x) \times A(y) = A(x * y) \in E$.

d'où E est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R}), \times)$.

②a) soient x, y de $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

on a $f(x * y) = A(x * y) = A(x) \times A(y) = f(x) \times f(y)$

donc f est homomorphisme de $(\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}, *)$ vers $(E, \times)$.

Montrons de plus que f est bijective.

Soit M une matrice de E

donc $\exists ! x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\} \text{ tq } M = A(x)$

d'où $\exists ! x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\} \text{ tq } M = A(x) = f(x)$

d'où $\forall M \in E \exists ! x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\} \text{ tq } M = f(x)$

on déduit que f est bijective de $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ vers E

on conclut que f est isomorphisme de $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ vers E .

②b) on a $(\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}, *)$ est un groupe commutatif

et f est un isomorphisme de $(\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}, *)$ vers $(E, \times)$

donc $(E, \times)$ est un groupe commutatif.

③ pour $n=1$, on a $B^1 = B = A\left(-\frac{1}{2}\right) = A\left(\frac{1-2^1}{2}\right)$, vérifiée
soit $n \in \mathbb{N}^*$

on suppose que $B^n = A\left(\frac{1-2^n}{2}\right)$ et on montre que $B^{n+1} = A\left(\frac{1-2^{n+1}}{2}\right)$

$$\begin{aligned} \text{on a } B^{n+1} &= B^n \times B^1 = A\left(\frac{1-2^n}{2}\right) \times A\left(-\frac{1}{2}\right) = A\left(\frac{1-2^n}{2} * \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= A\left(\frac{1-2^n}{2} - \frac{1}{2} - 2\left(\frac{1-2^n}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = A\left(\frac{1-2^{n+1}}{2}\right) \end{aligned}$$

donc d'après le principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad B^n = A\left(\frac{1-2^n}{2}\right)$.

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (B^n)^{-1} = A\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$.
soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \text{on a } B^n \times A\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) &= A\left(\frac{1-2^n}{2}\right) \times A\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\ &= A\left(\frac{1-2^n}{2} * \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right) \\ &= A\left(\frac{1-2^n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} - 2\left(\frac{1-2^n}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right) \\ &= A\left(\frac{1}{2} - \frac{2^n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2^n}{2} - \frac{2^n}{2^{n+1}}\right) \\ &= A\left(\frac{1}{2} - \frac{2^n}{2^{n+1}}\right) = A\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = A(0) \end{aligned}$$

de plus $A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$

donc $B^n \times A\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = I_3$

et comme X est commutative dans E

donc $A\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \times B^n = I_3$

d'où $(B^n)^{-1} = A\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Problème

Partie ① Soit $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

① Soit $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 < x^2 + 1 \Rightarrow |x| < \sqrt{x^2 + 1}$

$$\Rightarrow -\sqrt{x^2 + 1} < x < \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow x > -\sqrt{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$$

$$\text{donc } \forall x \in \mathbb{R} \quad x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x + \sqrt{x^2 + 1} > 0\}$$

et comme d'après ce qui précède $\forall x \in \mathbb{R} \quad x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$

$$\text{donc } D_f = \mathbb{R}$$

② (a) on a $\forall x \in \mathbb{R} : -x \in \mathbb{R}$

de plus $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

$$= \ln\left(\frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}\right) = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$= -f(x)$$

donc f est impaireDeduction : comme f est impaire donc $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$

b) on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1}) = +\infty$

et comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) + \ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)}{x} \right) = 0 \quad \left(\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \right)$$

donc (C_f) admet une branche parabolique de direction (px) au voisinage de $+\infty$.

② a) soit $h \geq 0$, on a $1 - h^2 \leq 1 \Rightarrow (1-h)(1+h) \leq 1$
 $\Rightarrow 1-h \leq \frac{1}{1+h}$ (car $1+h > 0$)
 et de plus $1+h \leq 1+h + \frac{h^2}{4}$
 $\Rightarrow 1+h \leq \left(1 + \frac{h}{2}\right)^2$
 $\Rightarrow \sqrt{1+h} \leq 1 + \frac{h}{2}$ (car $\sqrt{\left(1 + \frac{h}{2}\right)^2} = \left|1 + \frac{h}{2}\right| = 1 + \frac{h}{2} > 0$)

b) soit $t \geq 0$ on a $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

on a d'après ce qui $\sqrt{1+t^2} \leq 1 + \frac{t^2}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \geq \frac{1}{1+\frac{t^2}{2}}$

et de plus $\frac{1}{1+h} \geq 1-h$ pour tout $h \geq 0$

donc $\frac{1}{1+\frac{t^2}{2}} \geq 1 - \frac{t^2}{2}$ d'où $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \geq 1 - \frac{t^2}{2}$

d'où $\boxed{f'(t) \geq 1 - \frac{t^2}{2}} \quad ①$

de plus $\sqrt{1+t^2} \geq 1, t \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \leq 1$

$\Rightarrow ② \boxed{f'(t) \leq 1}$ pour $t \geq 0$

de ① et ② on conclut que $\forall t \geq 0, 1 - \frac{t^2}{2} \leq f'(t) \leq 1$

③ a) soit $x \geq 0$, f est continue sur $[0, x]$ et f est dérivable sur $]0, x[$
 donc d'après T.A.F $\exists c \in]0, x[$ tq $f(x) - f(0) = x \cdot f'(c)$

et comme $\forall t \geq 0, f'(t) \leq 1$ donc $f'(c) \leq 1$

$\Rightarrow x \cdot f'(c) \leq x \quad (x \geq 0)$

$\Rightarrow \boxed{f(x) \leq x} \quad ①$

de plus $\forall t \geq 0, 1 - \frac{t^2}{2} \leq f'(t)$

$\Rightarrow \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) dt \leq \int_0^x f'(t) dt$

$\Rightarrow \boxed{x - \frac{x^3}{6} \leq f(x)} \quad ② \quad (\text{car } f(0) = 0)$

de ① et ② on conclut que $\forall x \geq 0, x - \frac{x^3}{6} \leq f(x) \leq x$

- ③ a) on a $x \mapsto x + \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad x + \sqrt{x^2+1} > 0$
 et $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme composée de deux fcts)
 et on a $\forall x \in \mathbb{R}$

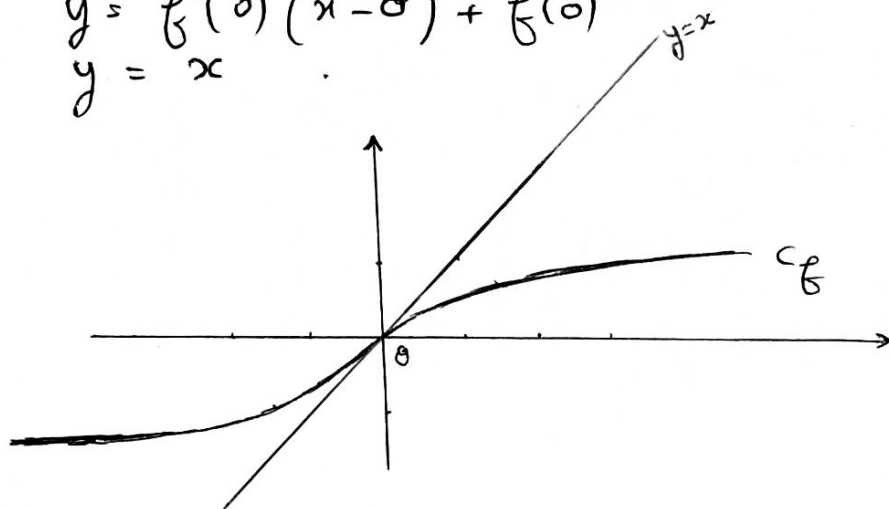
$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\ln(x + \sqrt{x^2+1}) \right)' = \frac{(x + \sqrt{x^2+1})'}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1} (x + \sqrt{x^2+1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

- b) on a pour tout $x \in [0, +\infty[\quad \sqrt{x^2+1} > 0$

$$\Rightarrow \forall x \in [0, +\infty[\quad f'(x) > 0$$

$\Rightarrow f$ est strictement croissante sur $D_E = [0, +\infty[$

- ④ l'équation de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0
 est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$
 $y = x$



Partie ② $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \left[\ln|x+1| \right]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln 2$

$$\begin{aligned} \text{on a } V_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n \left(1 + \frac{k}{n}\right)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \\ &= \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^n f\left(0 + (1-0) \cdot \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

et comme f est continue sur $[0,1]$ avec $f(x) = \frac{1}{1+x}$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2$$

⑥ on a d'après ce qui précède $\forall x \geq 0 \quad x - \frac{x^3}{6} \leq f(x) \leq x$
 donc $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad k - \frac{k^3}{6} \leq f\left(\frac{1}{n+k}\right) \leq \frac{1}{n+k}$

$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{h=1}^n \left(\frac{1}{n+h} - \frac{1}{6(n+h)^3} \right) \leq \sum_{h=1}^n f\left(\frac{1}{n+h}\right) \leq \sum_{h=1}^n \frac{1}{n+h}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{h=1}^n \frac{1}{n+h} - \sum_{h=1}^n \frac{1}{6(n+h)^3} \leq U_n \leq V_n$$

de plus $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \frac{1}{(n+k)^2} \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{1}{(n+k)(n+k)^2} \leq \frac{1}{n^2(n+k)}$

$$\Rightarrow \sum_{h=1}^n \frac{1}{(n+h)^3} \leq \frac{1}{n^2} \sum_{h=1}^n \frac{1}{(n+h)}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{6n^2} \sum_{h=1}^n \frac{1}{n+h} \leq -\sum_{h=1}^n \frac{1}{6(n+h)^3}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{6n^2} \cdot V_n \leq -\sum_{h=1}^n \frac{1}{6(n+h)^3}$$

$$\text{d'où} \quad \sum_{h=1}^n \frac{1}{n+h} - \frac{1}{6n^2} \cdot V_n \leq \sum_{h=1}^n \frac{1}{n+h} - \sum_{h=1}^n \frac{1}{6(n+h)^3}$$

$$\text{donc} \quad V_n - \frac{1}{6n^2} \cdot V_n \leq U_n \leq V_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{etc.} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad V_n \left(1 - \frac{1}{6n^2} \right) \leq U_n \leq V_n$$

$$\text{comme} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} V_n = \sum_{n=1}^{+\infty} V_n \left(1 - \frac{1}{6n^2} \right) = \ln 2$$

donc d'après le théorème des gendarmes, $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n = \ln 2$

Partie ③

① on a $-x \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
 de plus $F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{f(t)}{t^2} dt$

on pose $t = -u \Rightarrow dt = -du$

$$\text{donc} \quad F(-x) = \int_x^{2x} \frac{f(-u)}{u^2} (-du) = - \int_x^{2x} \frac{f(u)}{u^2} du = F(x)$$

(car $x \mapsto f$ est impaire)

d'où F est paire.

② a) on a d'après la partie ② question ③ a)

$$\forall x > 0 \quad x - \frac{x^3}{6} \leq f(x) \leq x$$

$$\Rightarrow \forall t > 0 \quad t - \frac{t^3}{6} \leq f(t) \leq t$$

$$\Rightarrow \forall x > 0 \quad \int_x^{2x} \left(t - \frac{t^3}{6} \right) dt \leq \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t^2} dt \leq \int_x^{2x} \frac{t}{t^2} dt$$

$$\Rightarrow \forall x > 0 \quad \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} - \frac{t^2}{6} \right) dt \leq F(x) \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$$

après le calcul (à vérifier) on trouve $-\frac{x^2}{4} + \ln 2 \leq F(x) \leq \ln 2$

⑥ Comme $\forall x > 0 \quad -\frac{x^2}{4} + \ln 2 \leq F(x) \leq \ln 2$

et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^2}{4} + \ln 2 \right) = \ln 2$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = F(0)$

d'où F est continue en 0^+ .

de plus $\forall x > 0 \quad -\frac{x}{4} \leq \frac{F(x) - \ln 2}{x} \leq 0$

et comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x}{4} \right) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x} = 0$

donc F est dérivable à droite de 0 et on a $F'_d(0) = 0$

③ a) on a pour tout $x > 0$, $x \leq t \leq 2x$

et comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

donc $f(x) \leq f(t) \leq f(2x)$, pour $x > 0$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{t^2} \leq \frac{f(t)}{t^2} \leq \frac{f(2x)}{t^2}$$

$$\Rightarrow \int_x^{2x} \frac{f(x)}{t^2} dt \leq \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t^2} dt \leq \int_x^{2x} \frac{f(2x)}{t^2} dt$$

$$\Rightarrow f(x) \left[-\frac{1}{t} \right]_x^{2x} \leq F(x) \leq f(2x) \left[-\frac{1}{t} \right]_x^{2x}$$

$$\Rightarrow \forall x > 0 \quad \frac{f(x)}{2x} \leq F(x) \leq \frac{f(2x)}{2x}$$

⑥ on a d'après ce qui précède $\forall x > 0$ $\frac{f(x)}{x} \leq F(x) \leq \frac{f(2x)}{2x}$
 et comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} = 0$

donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$
 de plus $\forall x > 0$ $\frac{f(x)}{x} \times \frac{1}{x} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{f(2x)}{2x} \times \frac{1}{x}$

et comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(t)}{t} \cdot \frac{1}{t} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(2t)}{2t} \cdot \frac{1}{t} \right) = 0$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$

④ Rappel très important :

① si f une fonction continue sur un intervalle I et soit $a \in I$
 alors la fonction $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur I et on a
 $\forall x \in I : F'(x) = f(x)$.

② si f est continue sur I et u une fonction dérivable sur J tel que
 $u(J) \subset I$, alors $\forall a \in I$ $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t) dt$ est dérivable sur J
 et on a $\forall x \in J$ $F'(x) = u'(x) \cdot f(u(x))$.

③ si f est continue sur I et u est dérivable sur I et $a \in I$ alors
 la fonction $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t) dt$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I \quad F'(x) = u'(x) \cdot f(u(x)).$$

④ Méthode ①

$$\text{soit } x \in]0, +\infty[\quad F(x) = \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t^2} dt = \int_0^{2x} \frac{f(t)}{t^2} dt - \int_0^x \frac{f(t)}{t^2} dt$$

soit G la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $G(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{t^2} dt$

on a $t \mapsto \frac{f(t)}{t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$

(car f est continue sur $]0, +\infty[$ et $t \mapsto t^2$ est continue
 et non nul sur $]0, +\infty[$)

donc G est dérivable sur $]0, +\infty[$

de plus $u: x \mapsto 2x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $u(]0, +\infty[) \subset]0, +\infty[$
 et G est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc $G \circ u$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

donc $F = -G + G \circ U$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a
 $\forall x \in]0, +\infty[\quad F'(x) = -G'(x) + U'(x) \cdot G'(U(x))$
 $= -\frac{f(x)}{x^2} + 2 \cdot \frac{f(2x)}{(2x)^2} = -\frac{f(x)}{x^2} + \frac{f(2x)}{2x^2}$
 $= \frac{f(2x) - 2f(x)}{2x^2}$

Méthode (2) on a $\forall x > 0 \quad F(x) = \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t^2} dt$

on a $t \mapsto \frac{f(t)}{t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$ (car ...)
 et les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto 2x$ sont dérivables sur $]0, +\infty[$
 et on a $F'(x) = 2 \frac{f(2x)}{(2x)^2} - \frac{f(x)}{x^2}$
 $= \frac{f(2x) - 2f(x)}{2x^2}$

(b) on a $\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

donc f' est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a $f''(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}^3} = -\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}$
 donc $\forall x > 0 \quad f''(x) < 0$

d'où f' est décroissante sur $]0, +\infty[$

Deduction: $\forall x > 0 \quad x < 2x$ donc $f'(2x) < f'(x)$
 donc $\int_0^t f'(2x) dx < \int_0^t f'(x) dx$ pour $t > 0$
 $\frac{1}{2} f(2t) < f(t) \Rightarrow f(2t) < 2f(t)$

d'où $\forall x > 0 \quad f(2x) < 2f(x)$

(c) on a d'après ce qui précède $\forall x > 0 \quad f(2x) < 2f(x)$

donc $\forall x > 0 \quad f(2x) - 2f(x) < 0$

d'où $\forall x > 0 \quad F'(x) < 0$

q/c

x	0	$+\infty$
$F(x)$	$\ln 2$	0

Fin



Lycée ibn toufail
Oued-zem

Mathématiques
2eme bac SM

Examens blancs 2021

Prof B.LOUKILIA

Bouazzaloukilia@gmail.com

Nr whatsapp 0674631401

Exercice 1 : (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E) $z^2 - 4iz - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$.

1) a) Vérifier que le nombre complexe $a = 1 + i(2 - \sqrt{3})$ est une solution de l'équation (E).

b) Dédire b la deuxième solution de l'équation (E).

2) a) Montrer que $a^2 = 4(2 - \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) Ecrire le nombre a sous la forme trigonométrique.

3) On considère les points A, B et C d'affixes respectifs a, b et $c = 2i + 2e^{i\frac{\pi}{7}}$. Soit (Γ) le cercle dont $[AB]$ est l'un de ses diamètres.

a) Déterminer ω l'affixe du point Ω centre du cercle (Γ) .

b) Montrer que les points O et C appartiennent au cercle (Γ) .

c) Montrer que le nombre complexe $\frac{c-a}{c-b}$ est imaginaire pur.

Exercice 3 : (4 points)

Soit la fonction F définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par:

$$F(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2} ; (x \in]0; 1]) \quad \text{et} \quad F(0) = 1$$

1) Soit x un élément de l'intervalle $[0; 1]$, montrer que : $(\forall t \in [0; x]) ; \frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$

2) Soit x un élément de l'intervalle $]0; 1]$

a) Montrer que : $F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{1+2t} dt$

b) Montrer que : $\frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$, en déduire que F est continue à droite au point 0.

3) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x \in [0; 1]) ; \int_0^x \frac{2t}{1+2t} dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2 \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt$$

4) Soit x un élément de l'intervalle $]0; 1]$.

a) Montrer que : $F'(x) = \frac{-4}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt$

b) Montrer que : $\frac{-4}{3} \leq F'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$ (on pourra utiliser le résultat de la question 1)

c) En appliquant le TAF à la fonction F sur $[0; x]$, montrer que :

$$\frac{-4}{3} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

d) En déduire que la fonction F est dérivable à droite au point 0 et déterminer le nombre dérivé à droite de 0.

Exercice 4 (8 points)

Partie ①

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right)$.

On appelle (C_f) la courbe représentative de la fonction numérique f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 0,5 1- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- 0,5 2- Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de f .
- 0,5 3- Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) puis préciser la position relative de (D) et (C_f) .
- 0,5 4 -a- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
- 0,5 b- Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
- 0,5 5 - Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.
- 1 6- Construire dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite (D) et les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ en précisant la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisses 0. ($(C_{f^{-1}})$ est la courbe représentative de f^{-1}).

Partie ②

Soit $(u_n)_n$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

- 0,5 1- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n > 0$.
- 0,5 2-a- Montrer que : $\forall x > 0 ; |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
- 0,5 b- En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} ; \left| u_{n+1} - \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{2} \left| u_n - \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \right|$.
- 0,75 c- Montrer que $(u_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.

Partie ③

- 0,75 1- Montrer que : $\forall t > 0 ; t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$.
- 0,5 2- En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R} ; e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} \leq f(x) \leq e^{-x}$.
- 0,5 3- Soit A l'aire du domaine plan limité par (C_f) , l'axe des abscisses, l'axe

des ordonnées et la droite d'équation $x=1$.
 Montrer que $\frac{1}{4e^2}[(3e-1)(e-1)] \leq A \leq \left(\frac{e-1}{e}\right)$.

Exercice 5 : (4 points)

Les trois parties (I), (II) et (III) sont indépendantes.

- 0,25 I. 1- Montrer que le nombre 673 est premier.
- 0,5 2- Montrer que : $2^{672} \equiv 1 [2019]$ (remarquer que : $2019 = 673 \times 3$).
- 0,25 3- Quelle est le reste de la division euclidienne de 2^{2018} par 2019.
- 0,5 4- En déduire que les nombres 2019 et $2^{2018} - 2019^{2019}$ sont premiers entre eux.
- II. Dans $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$, on considère l'équation : $(E): x^2 + y = xy$.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$; soit d le plus grand diviseur commun de x et y .
- Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ tel que : $x = ad$ et $y = bd$.
- 0,5 1- Montrer que si (x, y) est une solution de (E) , alors a divise b .
- 0,5 2- En déduire que la seule solution de l'équation (E) dans $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ est $(2, 4)$.
- III. Soit b un entier naturel.
- 0,5 1- Déterminer les restes possibles dans la division euclidienne de b^4 par 10.
- 0,5 1- En déduire que $b^4 \equiv 1 [10]$ si et seulement si b est premier avec 10.
- 0,5 2- Déterminer les deux derniers chiffres de 67^{42} .

Fin du sujet .

Exercice 1 (Complexe)

① a) Soit l'éq: (E) $z^2 - 4iz - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$

on a $a^2 - 4ia - 2 + 2i\sqrt{3}$

$$= (1 + i(2 - \sqrt{3}))^2 - 4i(1 + i(2 - \sqrt{3})) - 2 + 2i\sqrt{3}$$

$$= 1 + 2i(2 - \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3})^2 - 4i + 4(2 - \sqrt{3}) - 2 + 2i\sqrt{3}$$

$$= 1 + 4i - 2i\sqrt{3} - 4 + 4\sqrt{3} - 3 - 4i + 8 - 4\sqrt{3} - 2 + 2i\sqrt{3}$$

$$= 1 - 4 + 4\sqrt{3} - 3 + 8 - 4\sqrt{3} - 2 + 4i - 2i\sqrt{3} - 4i + 2i\sqrt{3}$$

$$= 0$$

donc a est une solution de l'éq (E).

② Important : si z_1 et z_2 solutions de (E) : $az^2 + bz + c = 0$
 alors $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$

soit b la deuxième solution de (E), on a donc

$$a + b = -\frac{-4i}{1} = 4i \Leftrightarrow b = 4i - a = 4i - 1 - i(2 - \sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow b = -1 + i(2 + \sqrt{3})$$

② a) on a $a^2 = (1 + i(2 - \sqrt{3}))^2$

$$= 1 + 2i(2 - \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3})^2$$

$$= 2i - (\sqrt{3})^2 + 2i(2 - \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3})^2$$

$$= (2 - \sqrt{3}) (2 + \sqrt{3} + 2i - (2 - \sqrt{3}))$$

$$= (2 - \sqrt{3}) (2 + \sqrt{3} + 2i - 2 + \sqrt{3})$$

$$= (2 - \sqrt{3}) (2\sqrt{3} + 2i) = 4(2 - \sqrt{3}) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right)$$

$$= 4(2 - \sqrt{3}) e^{i\pi/6}$$

Handwritten note: $1 = 2^2 - \sqrt{3}^2 = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$

② ⑥ on pose $a = (r, \theta)$ avec $|a| = r$ et $\theta = \arg(a)$ (2°)

donc $a^2 = 4\sqrt{2-\sqrt{3}} e^{i\pi/6}$

$$\Rightarrow (r^2, 2\theta) = (4(2-\sqrt{3}), \frac{\pi}{6})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = 2\sqrt{2-\sqrt{3}} & (r > 0) \\ 2\theta = \frac{\pi}{6} \quad (2\pi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = 2\sqrt{2-\sqrt{3}} \\ \theta = \frac{\pi}{12} \quad (2\pi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = 2\sqrt{2-\sqrt{3}} \\ \theta = \frac{\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \{0, 1\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = 2\sqrt{2-\sqrt{3}} \\ \theta = \frac{\pi}{12} \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{13\pi}{12} \end{cases}$$

et comme $a = 1 + i(2-\sqrt{3})$

donc $\operatorname{Re}(a) > 0$ et $\operatorname{Im}(a) > 0$

d'où $\theta = \frac{\pi}{12} \quad \left(\begin{array}{l} \cos \frac{\pi}{12} > 0 \\ \sin \frac{\pi}{12} > 0 \end{array} \right)$

donc $a = 2\sqrt{2-\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{12}}$
 $= 2\sqrt{2-\sqrt{3}} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$

③ ⑧ (AB) est diamètre de (T) $\Leftrightarrow \Omega$ est milieu de (AB)

$$\Rightarrow w = \frac{a+b}{2} = -\frac{4i}{2} = 2i$$



si z_1 et z_2 solutions des $az^2 + bz + c = 0 \Rightarrow z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$

⑤ (AB) est diamètre de $(T) \Rightarrow \frac{AB}{2}$ est le rayon de (T)
 et comme $\frac{AB}{2} = \frac{|b-a|}{2} = \frac{|-2+2i\sqrt{3}|}{2} = |-1+i\sqrt{3}| = 2$

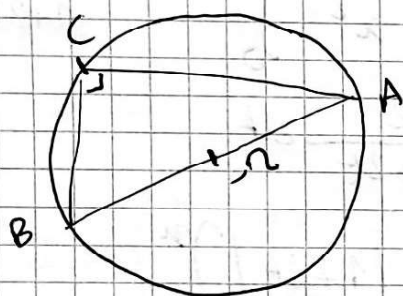
de plus $OR = |w-0| = |2i| = 2 = \frac{AB}{2}$

et $OC = |c-w| = |2i + 2e^{i\frac{\pi}{3}} - 2i| = |2e^{i\frac{\pi}{3}}| = 2 = \frac{AB}{2}$

d'où $OR = OC = \frac{AB}{2}$

donc O et C appartiennent au cercle (T) .

⑥



ma $C \in (T)$ de diamètre $(AB) \Rightarrow ABC$ est un triangle rectangle en C

donc $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad (\pi)$

$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \quad (\pi)$

$\Rightarrow \arg\left(\frac{a-c}{b-c}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \quad (\pi)$

$\Rightarrow \frac{a-c}{b-c} \in i\mathbb{R}$

Rappel

$$\left\{ \begin{array}{l} z \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \arg(z) \equiv 0 \quad (\pi) \\ z \in i\mathbb{R}^+ \Rightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} \quad (\pi) \end{array} \right.$$

Exercice 2 : (Calcul intégral)

① Soit $t \in [0, n]$ et $x \in (0, 1)$

$$\Rightarrow 0 \leq t \leq n \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq 1+2t \leq 1+2n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2n} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$$

② Soit $x \in]0, 1[$

$$\begin{aligned} \textcircled{c} \text{ on a } \frac{2}{x^2} \int_0^n \frac{t}{1+2t} dt &= \frac{1}{x^2} \int_0^n \frac{2t}{1+2t} dt \\ &= \frac{1}{x^2} \int_0^n \frac{2t+1-1}{1+2t} dt = \frac{1}{x^2} \int_0^n \left(1 - \frac{1}{1+2t} \right) dt \\ &= \frac{1}{x^2} \int_0^n dt - \frac{1}{2x^2} \int_0^n \frac{2}{1+2t} dt \\ &= \frac{1}{x^2} \left(t \right)_0^n - \frac{1}{2x^2} \left(\ln |1+2t| \right)_0^n \\ &= \frac{1}{x^2} (n) - \frac{1}{2x^2} (\ln(1+2n) - \ln(1)) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2n)}{2x^2} = F(n) \end{aligned}$$

donc $F(n) = \frac{2}{x^2} \int_0^n \frac{t}{1+2t} dt$, $x \in]0, 1[$.

⑥ on a d'après ce qui précède $\frac{1}{1+2n} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$

et comme $t \geq 0$ alors $\frac{t}{1+2n} \leq \frac{t}{1+2t} \leq t$

et comme toutes ces fonctions sont continues sur $]0, +\infty[$

alors $\frac{2}{x^2} \int_0^n \frac{t}{1+2n} dt \leq F(n) \leq \frac{2}{x^2} \int_0^n t dt$

$$\frac{2}{x^2} \left(\frac{1}{1+2n} \cdot \frac{1}{2} t^2 \right)_0^n \leq F(n) \leq \frac{2}{x^2} \left(\frac{1}{2} t^2 \right)_0^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2n} \leq F(n) \leq 1$$

Deduction

on a $\forall x \in]0,1[) \quad \frac{1}{1+2n} \leq F(n) \leq 1$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+2n} \right) = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = 1 = F(0)$

d'où F est continue en 0 à droite.

(3) soit $I = \int_0^n \frac{2t}{1+2t} dt$

on pose $u(t) = 2t$

$v(t) = \frac{1}{1+2t}$

$u'(t) = 2$

$v'(t) = -\frac{2}{(1+2t)^2}$

$$I = \int_0^n \frac{2t}{1+2t} dt = \left(\frac{t^2}{1+2t} \right)_0^n + 2 \int_0^n \frac{t^2}{(1+2t)^2} dt$$

$$= \frac{n^2}{1+2n} + 2 \int_0^n \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt$$

(4) (a) on a $F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{1+2t} dt, \quad x \in]0,1[)$

on a $t \mapsto \frac{t}{1+2t}$ est continue sur $]0,1[)$ (fct rationnelle)

donc $x \mapsto \int_0^x \frac{t}{1+2t} dt$ est dérivable sur $]0,1[)$

et $x \mapsto \frac{2}{x^2}$ est dérivable sur $]0,1[)$

d'où F est dérivable sur $]0,1[)$ (comme produit de deux fcts dérivables)

et on a

$$\begin{aligned}
 F'(u) &= \left(\frac{2}{u^2}\right)' \int_0^u \frac{t}{1+2t} dt + \left(\frac{2}{u^2}\right) \left(\int_0^u \frac{t}{1+2t} dt\right)' \\
 &= -\frac{4u}{u^4} \int_0^u \frac{t}{1+2t} dt + \frac{2}{u^2} \cdot \frac{u}{1+2u} \\
 &= -\frac{4}{u^3} \int_0^u \frac{t}{1+2t} dt + \frac{2}{u(1+2u)} \\
 &= -\frac{4}{u^3} \left(\frac{1}{2} \frac{u^2}{1+2u} + \int_0^u \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt \right) + \frac{2}{u(1+2u)} \\
 &= -\frac{2}{u(1+2u)} - \frac{4}{u^3} \int_0^u \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt + \frac{2}{u(1+2u)} \\
 &= -\frac{4}{u^3} \int_0^u \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt
 \end{aligned}$$

(b) soit $x \in]0, 1]$ et $t \in [0, x]$

on a
$$0 \leq \frac{1}{1+2u} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{t^2}{(1+2u)^2} \leq \frac{t^2}{(1+2t)^2} \leq t^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+2u)^2} \int_0^u t^2 dt \leq \int_0^u \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt \leq \int_0^u t^2 dt$$

(toutes ces fonctions sont continues)

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+2u)^2} \left(\frac{1}{3} x^3\right) \leq \int_0^u \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt \leq \frac{1}{3} x^3$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{3} \leq -\frac{4}{u^3} \int_0^u \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt \leq -\frac{4}{3(1+2u)^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{3} \leq F'(u) \leq -\frac{4}{3(1+2u)^2}$$

(c) Soit $F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{1+2t} dt, \quad x \in]0,1[$

F est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$
 (comme produit de deux fcts continues et
 dérivables sur $]0,+\infty[$)

donc d'après T.A.F. $\exists c \in]0,x[$ tq

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(c)$$

et comme $\forall x \in]0,1[$ $-\frac{4}{3} \leq F'(u) \leq -\frac{4}{3(1+2u)^2}$

et $c \in]0,x[\subset]0,1[$

donc $-\frac{4}{3} \leq F'(c) \leq -\frac{4}{3(1+2u)^2}$

d'où $-\frac{4}{3} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq -\frac{4}{3(1+2u)^2}$

(c) on a d'après ce qui précède

$$-\frac{4}{3} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq -\frac{4}{3(1+2u)^2}$$

et $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{4}{3(1+2u)^2} = -\frac{4}{3}$

donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x} = -\frac{4}{3}$

d'où F est dérivable à droite au point 0

et on a $F'_d(0) = -\frac{4}{3}$

Exercice 4. (Arithmétique)

Partie I

① on a $\sqrt{673} \approx 25,94$

et les nombres premiers inférieurs à 25,94 sont

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$$

et 673 n'est pas divisible par aucun d'eux

donc 673 est premier

② on a 673 est premier et $2 < 673$

donc $2 \nmid 673 \Rightarrow 1$

d'où d'après le théorème de Fermat $2^{672} \equiv 1 \pmod{673}$

de plus 3 est premier et $2 \nmid 3 \Rightarrow 1$

d'où d'après le théorème de Fermat $2^2 \equiv 1 \pmod{3}$

$$\Rightarrow (2^2)^{336} \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow 2^{672} \equiv 1 \pmod{3}$$

on a donc

$$\left\{ \begin{array}{l} 2^{672} - 1 \equiv 0 \pmod{3} \\ 2^{672} - 1 \equiv 0 \pmod{673} \end{array} \right.$$

$$2^{672} - 1 \equiv 0 \pmod{673}$$

et puisque $3 \nmid 673 \Rightarrow 1$ donc $2^{672} - 1 \equiv 0 \pmod{3 \times 673}$

d'où $2^{672} \equiv 1 \pmod{2019}$

③ on a $2^{672} \equiv 1 \pmod{2019}$

$$\Rightarrow (2^{672})^3 \equiv 1 \pmod{2019}$$

$$\Rightarrow 2^2 \times 2^{2016} \equiv 2^2 \pmod{2019}$$

$$\Rightarrow 2^{2018} \equiv 4 \pmod{2019}$$

d'ici 4 et le reste de la division euclidienne
de 2^{2018} par 2019.

$$(4) \text{ on pose } d = 2019 \wedge (2^{2018} - 2019^{2019})$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d \mid 2019 \\ d \mid 2^{2018} - 2^{2019} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d \mid 2^{2019} \\ d \mid 2^{2018} - 2^{2019} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d \mid 2019 \\ d \mid 2^{2018} - 2^{2019} + 2019^{2019} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d \mid 2019 \\ d \mid 2^{2018} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d \mid 2019h, h \in \mathbb{Z} \\ d \mid 2^{2018} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d \mid 2019 \\ d \mid 2^{2018} - 2019h \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d \mid 2019 \\ d \mid 4 \end{array} \right. \quad \left(\text{car } 2^{2018} \equiv 4 \pmod{2019} \right)$$

$$\Rightarrow d \mid 4 \wedge 2019$$

et comme $2 \wedge 2019 = 1 \Rightarrow 2^2 \wedge 2019 = 1$
 $\Rightarrow 4 \wedge 2019 = 1$

d'ici $d \mid 1 \Rightarrow d = 1$ (car $d > 0$)

donc 2019 et $2^{2018} - 2^{2019}$ sont

premiers entre eux

Partie II

① (n, y) solution de E $\Rightarrow x^2 + y = ny$

$$\Rightarrow n \mid x^2 + y$$

et comme $n \mid x^2 \Rightarrow n \mid x^2 + y^2 - x^2$

$$\Rightarrow n \mid y$$

$$\Rightarrow \exists h \in \mathbb{Z} \text{ tp } y = hn$$

$$\Rightarrow \exists h \in \mathbb{Z} \text{ tp } bd = hnd$$

$$\Rightarrow \exists h \in \mathbb{Z} \text{ tp } b = ha$$

($d \neq 0$)

$$\Rightarrow a \mid b$$

② on a $as = xy$ et $ns = ad$ et $y = bd$
donc $a \wedge b = 1$.

si (n, y) est solution de (E), $x^2 + y = ny$

donc a divise b

$$\Rightarrow a \wedge b = |a|$$

$$\Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow a = 1 \text{ ou } a = -1$$

si $a = 1$ (E) $\Rightarrow x = d$ et $y = bd$

$$\Rightarrow x^2 + y = ny$$

$$\Rightarrow d^2 + bd = d \cdot bd$$

$$\Rightarrow d + b = db$$

$$\Rightarrow a = b = 2 \text{ (car } b, d \in \mathbb{Z}^+)$$

$$\Rightarrow x = ad = 2 \text{ et } y = bd = 4$$

$$\Rightarrow (n, y) = (2, 4)$$

$$\text{si } a = -1 \Rightarrow x = -d \text{ et } y = bd$$

$$\Rightarrow (E) : d^2 + bd = -bd.d$$

$$\Rightarrow d + b = -bd$$

$$\Rightarrow a = -2 \text{ et } b = -2 \text{ impossible}$$

reciproquement le couple $(2, 4)$ verifie l'eq

$$(E) \quad x^2 + y = xy$$

$\Rightarrow (2, 4)$ est la seule solution de (E).

Partie III

① soit $b \in \mathbb{N}$

donc $b \equiv 0 \pmod{10}$

ou $b \equiv 1 \pmod{10}$

ou $b \equiv 2 \pmod{10}$

ou $b \equiv 3 \pmod{10}$

ou $b \equiv 4 \pmod{10}$

ou $b \equiv 5 \pmod{10}$

ou $b \equiv 6 \pmod{10}$

ou $b \equiv 7 \pmod{10}$

ou $b \equiv 8 \pmod{10}$

ou $b \equiv 9 \pmod{10}$

$$b^4 \equiv 0$$

$$b^4 \equiv 1$$

$$b^4 \equiv 16 \equiv 6 \pmod{10}$$

$$b^4 \equiv 81 \equiv 1 \pmod{10}$$

$$b^4 \equiv 256 \equiv 6 \pmod{10}$$

$$b^4 \equiv 625 \equiv 5 \pmod{10}$$

$$b^4 \equiv 1296 \equiv 6 \pmod{10}$$

$$b^4 \equiv 2401 \equiv 1 \pmod{10}$$

$$b^4 \equiv 4096 \equiv 6 \pmod{10}$$

$$b^4 \equiv 6561 \equiv 1 \pmod{10}$$

d'ou les restes possibles dans la division euclidienne de b^4 par 10 sont $\{0, 1, 5, 6\}$

② $(\Rightarrow) b^4 \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow 10 \mid b^4$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } b^4 = 10k$$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } b(b^3) = 10k \Rightarrow 10 \mid b(b^3)$$

$$\Rightarrow b \wedge 10 = 1 \quad (u \leq b^3, v \leq 10)$$

(←) on a $b \wedge 10 = 1$
montrons que $b^4 \equiv 1 \pmod{10}$ (utilisant l'absurde)

d'après ce qui précède on a,

$$b^4 \equiv \text{?} \pmod{10} \text{ on } b^4 \equiv \text{?} \pmod{10} \text{ on } b^4 \equiv \text{?} \pmod{10} \text{ on}$$

$$b^4 \equiv 0 \pmod{10}$$

$$\text{si } b^4 \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow 10 \mid b^4$$

$$\Rightarrow b^4 \wedge 10 = 10$$

$$\Rightarrow 1 = 10 \quad (b \wedge 10 = b^4 \wedge 10 = 1)$$

$\Rightarrow$ absurde

$$\text{si } b^4 \equiv 5 \pmod{10} \Rightarrow 10 \nmid b^4$$

$$\Rightarrow b^4 = 5 + 10k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow b^4 = 5 + 10k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow b^4 = 5(1 + 2k), k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 5 \mid b^4$$

$$\Rightarrow 5 \mid b \quad (\text{car } 5 \text{ est premier})$$

$$\Rightarrow 10 \wedge b \geq 5 \quad (\text{car } 5 \mid 10)$$

$$\Rightarrow 1 \geq 5 \quad \text{absurde}$$

$$\text{si } b^4 \equiv 6 \pmod{10}$$

$$\Rightarrow 10 \nmid b^4$$

$$\Rightarrow b^4 = 6 + 10k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow b^4 = 2(3 + 5k), k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 2 \mid b^4$$

$$\Rightarrow 2 \mid b \quad (\text{car } 2 \text{ est premier})$$

$$\Rightarrow 10 \wedge b \geq 2$$

$$\Rightarrow 1 \geq 2$$

$\Rightarrow$ absurde

$$\text{etc } b^4 \equiv 1 \pmod{10}$$

D'où $67^4 \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow 67^{40} \equiv 1$

② on a $67^{40} \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow 67^4 \equiv 1 \pmod{10}$

$\Rightarrow 67^{40} \equiv 1 \pmod{10}$

$\Rightarrow 67^2 \times 67^{40} \equiv 67^2 \pmod{10}$

$\Rightarrow 67^{42} \equiv 4489 \pmod{10}$

$\equiv 9 \pmod{10}$

donc le chiffre d'unités de 67^{42} est 9

de plus $67^5 \equiv 7 \pmod{100} \Rightarrow 67^{40} \equiv 7^8 \pmod{100}$

$\equiv 1 \pmod{100}$

$\Rightarrow 67^{42} \equiv 67^2 \pmod{100}$

$\equiv 89 \pmod{100}$

d'où le chiffre des dizaines de 67^{42} est 8

on en déduit que les deux derniers chiffres de 67^{42} sont 8 et 9 (par l'ordre 89)

Méthode 2

on a $67^{40} \equiv 1 \pmod{100} \Rightarrow 67^4 \equiv 1 \pmod{100}$

$\Rightarrow ((67^4)^{10}) \equiv 1 \pmod{10^2}$

(car si $a \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow a^{10} \equiv 1 \pmod{10^2}$ à vérifier)

$a^{10} - 1 = \underbrace{(a-1)}_{10k'} \underbrace{(a^9 + a^8 + \dots + a + 1)}_{10k} \equiv 100kk'$

$\Rightarrow 67^{40} \equiv 1 \pmod{10^2}$

$\Rightarrow 67^{42} \equiv 67^2 \pmod{10^2}$

$\equiv 4489 \pmod{100}$

$\equiv 89 \pmod{100}$ CQFD.

Exercice 4. Partie I (Etude de fonctions)

1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{e^x(1 + e^{-x})}{e^x}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right) = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$$

$$(\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0)$$

2)

on a $x \mapsto \frac{e^x + 1}{e^x}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{e^x + 1}{e^x} > 0$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\text{et } \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \left(\ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right) \right)' = (\ln(e^x + 1) - \ln(e^x))'$$

$$= \frac{e^x}{e^x + 1} - 1 = \frac{e^x - e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{-1}{e^x + 1}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$-1/e^x + 1$	—	—
$f'(x)$	—	—
$f(x)$	$+\infty$	0

3).

on a $\lim_{n \rightarrow -\infty} f(n) = +\infty$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) + n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{e^n + 1}{e^n}\right) + n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(e^n + 1) - n + n$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(e^n + 1) = 0$

car $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = 0$

d'où la droite (D) d'éq. $y = -n$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$
La position relative de (D) et (C_f)

$f(n) - y = \ln\left(\frac{e^n + 1}{e^n}\right) + n = \ln(e^n + 1) - \ln(e^n) + n$
 $= \ln(e^n + 1) - n + n = \ln(e^n + 1)$

on a $\forall n \in \mathbb{R} \quad e^n > 0 \Rightarrow e^n + 1 > 1$

$\Rightarrow \ln(e^n + 1) > 0$

donc $f(n) - y > 0$ ie $f(n) > y$

d'où $\forall n \in \mathbb{R} \quad (C_f)$ est au dessus de (D)

4)

a).

on a $x \mapsto \frac{e^x + 1}{e^x}$ continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{e^x + 1}{e^x} > 0$

donc f continue sur $\mathbb{R}$

et on a f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur

J , tel que : $J = f(\mathbb{R}) = f(]-\infty; +\infty[)$

$=]\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n); \lim_{n \rightarrow -\infty} f(n)[$

$=]0; +\infty[$

b). $x \in]0; +\infty[\quad , y \in \mathbb{R}$

$n = f(y)$

$\Leftrightarrow n = \ln\left(\frac{e^y + 1}{e^y}\right) \Leftrightarrow e^n = \frac{e^y + 1}{e^y}$

$\Leftrightarrow e^n \cdot e^y = e^y + 1 \Leftrightarrow e^n \cdot e^y - e^y = 1$

$\Leftrightarrow e^y (e^n - 1) = 1 \Leftrightarrow e^y = \frac{1}{e^n - 1}$

$\Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{1}{e^n - 1}\right)$

d'où $f^{-1}:]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \ln\left(\frac{1}{e^x - 1}\right)$

5.)

$$f(u) = u \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^u + 1}{e^u}\right) = u$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^u + 1) - u = u$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^u + 1) = 2u$$

$$\Leftrightarrow e^u + 1 = e^{2u}$$

$$\Leftrightarrow e^{2u} - e^u - 1 = 0$$

on pose $t = e^u$ avec $t > 0$

l'éq devient $t^2 - t - 1 = 0$

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

$$t_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } t_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

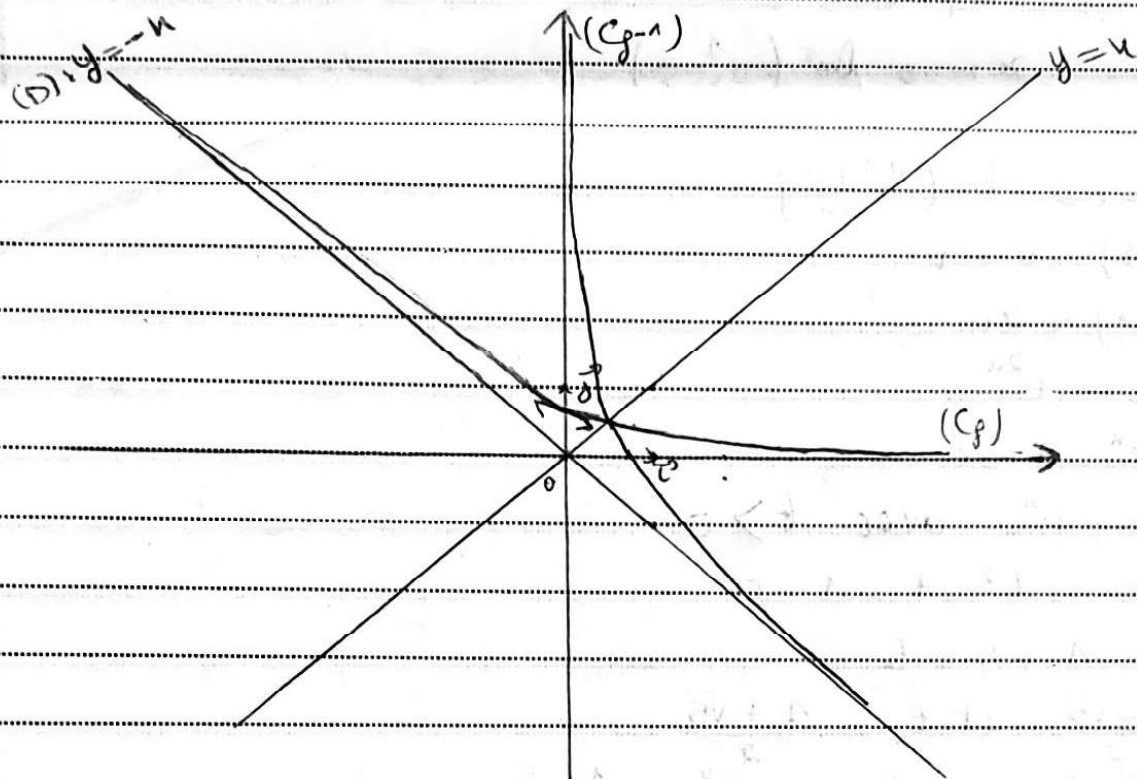
on a $\forall u \in \mathbb{R} \quad e^u > 0$ alors $e^u \neq \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

$$\text{donc } f(u) = u \Leftrightarrow e^u = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow u = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

$$S = \left\{ \ln\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \right\}$$

6)



Partie II:

1)

Pour $n = 0$ $u_0 = 1$ donc $u_0 > 0$ est vérifié

soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$

on a $\forall u \in \mathbb{R}^+ f(u) > 0$

$u_n > 0$ alors $f(u_n) > 0$

ie $u_{n+1} > 0$

d'après principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$

2)

a) $\forall u > 0$ on a $f'(u) = \frac{-1}{e^u + 1}$

$$\Rightarrow |f'(u)| = \frac{1}{e^u + 1}$$

$$x > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow e^x + 1 > 2 \\ \Rightarrow \frac{1}{e^x + 1} < \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } \forall x > 0 \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

b).

on a $\forall n > 0 \quad |f'(u)| \leq \frac{1}{2}$, et $u_n > 0$; $\ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) > 0$
d'après l'inégalité de T.A.F

$$\left| \frac{f(u_n) - f(\ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2}))}{u_n - \ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})} \right| \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |f(u_n) - f(\ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2}))| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})|$$

on a $\ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ est une solution de l'éq $f(x) = x$

$$\text{donc } f(\ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})) = \ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|u_{n+1} - \ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})|$$

c).

on a $\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq |u_n - \ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})| \leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - \ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})|$$

$$0 \leq |u_{n-1} - \ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})| \leq \frac{1}{2} |u_{n-2} - \ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})|$$

$$\vdots \\ 0 \leq |u_1 - \ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})| \leq \frac{1}{2} |u_0 - \ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})|$$

en multipliant les inégalités côté à côté :

on obtient :

$$0 \leq |u_n - \ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})|$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (-\ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + 1)$$

$$= 0$$

$$\text{car } -1 < \frac{1}{2} < 1$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |U_n - \ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})| = 0$

d'où $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et sa limite est:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Partie III.

1) $\forall x > 0 \quad 1 - x^2 < 1 \quad (\text{car } x^2 > 0)$

$$\Rightarrow (1-x)(1+x) < 1$$

$$\Rightarrow 1-x < \frac{1}{1+x} \quad (\text{car } 1+x > 0)$$

$$\text{et } x > 0 \Rightarrow x+1 > 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} < 1$$

donc $\forall x > 0 \quad 1-x < \frac{1}{1+x} < 1$

$$\forall x > 0; 1-x < \frac{1}{1+x} < 1$$

$$\Rightarrow \int_0^t 1-u \, dx < \int_0^t \frac{1}{1+u} \, du < \int_0^t 1 \, du \quad (t > 0)$$

$$\Rightarrow \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^t < [\ln(x+1)]_0^t < [x]_0^t$$

$$\Rightarrow t - \frac{t^2}{2} < \ln(t+1) < t$$

d'où $\forall t > 0$

$$t - \frac{t^2}{2} < \ln(t+1) < t$$

2) on a $\forall t > 0$, soit $u \in \mathbb{R}$

$$t - \frac{t^2}{2} < \ln(t+1) < t$$

donc :

$$e^{-u} - \frac{e^{-2u}}{2} < \ln(e^{-u}+1) < e^{-u} \quad (e^{-u} > 0)$$

$$\Rightarrow e^{-u} - \frac{e^{-2u}}{2} < \ln\left(\frac{1}{e^u}+1\right) < e^{-u}$$

$$\Rightarrow e^{-u} - \frac{e^{-2u}}{2} < \ln\left(\frac{1+e^u}{e^u}\right) < e^{-u}$$

d'où : $\forall u \in \mathbb{R}$

$$e^{-u} - \frac{e^{-2u}}{2} < \ln\left(\frac{e^u+1}{e^u}\right) < e^{-u}$$

$$\Rightarrow \forall u \in \mathbb{R} \quad e^{-u} - \frac{e^{-2u}}{2} \leq f(u) \leq e^{-u}$$

3)

$$\text{on a, } A = \int_0^1 f(u) du$$

$$\text{on a } \forall u \in \mathbb{R} \quad e^{-u} - \frac{e^{-2u}}{2} \leq f(u) \leq e^{-u}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(e^{-u} - \frac{e^{-2u}}{2} \right) du \leq \int_0^1 f(u) du \leq \int_0^1 e^{-u} du$$

$$\Rightarrow \left[-e^{-u} + \frac{e^{-2u}}{4} \right]_0^1 \leq A \leq \left[-e^{-u} \right]_0^1$$

$$\Rightarrow -e^{-1} + \frac{e^{-2}}{4} + 1 - \frac{1}{4} \leq A \leq -e^{-1} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{-4e^{-1} + e^{-2} + 4 - 1}{4} \leq A \leq 1 - \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \frac{-4e + 1 + 3e^2}{4e^2} \leq A \leq \frac{e-1}{e}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4e^2} (3e(e-1) - (e-1)) \leq A \leq \frac{e-1}{e}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4e^2} (3e-1)(e-1) \leq A \leq \frac{e-1}{e}$$

d'où

$$\frac{1}{4e^2} [(3e-1)(e-1)] \leq A \leq \left(\frac{e-1}{e} \right)$$